Fonctions trigonométriques

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Radian, sinus et cosinus

- Activités
- Cours
- Exercices

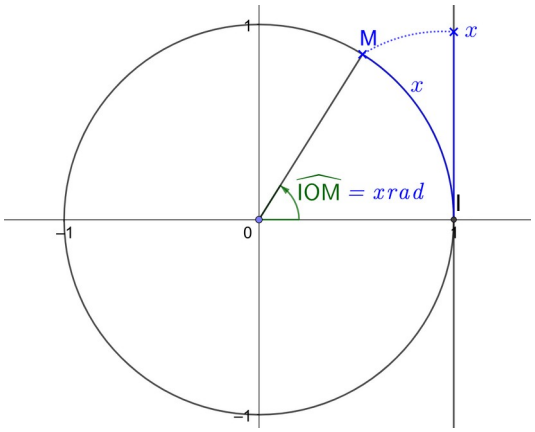
2. Fonctions trigonométriques

- Activités
- Cours
- Exercices

Fonctions trigonométriques : Radian, sinus et cosinus

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

Introduction. Dans un repère orthonormé d'origine O, le cercle trigonométrique est par définition le cercle de centre O et de rayon 1. On note I le point de coordonnées (1 ; 0). On trace la droite tangente au cercle en I et on la gradue en prenant I comme origine.



Le cercle trigonométrique ayant pour rayon 1, sa longueur est égale à 2π.
La longueur d'un demi-cercle vaut donc π.
La longueur d'un quart du cercle trigonométrique vaut donc $\frac{\pi}{2}$.

En enroulant la droite tangente au cercle sur le cercle trigonométrique à partir du point I, (illustration en vidéo et en animation) chaque réel x de la droite donne un point M sur le cercle trigonométrique. Ce point M peut être caractérisé par l'angle au centre $\widehat{IOM}$.

Lorsque $\widehat{IOM}$ =180°, l'arc de cercle IM vaut un demi-cercle soit $\pi \approx 3{,}14$: si $x = \pi$, alors $\widehat{IOM} = 180°$.
Lorsque $\widehat{IOM}$ =90° (avec M dans le demi-cercle supérieur), le demi-cercle est partagé en 2 (car 90° = 180° ÷ 2) et l'arc de cercle IM vaut donc un quart de cercle soit $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$: si $x = \frac{\pi}{2}$, alors $\widehat{IOM} = 90°$.

Lorsque $\widehat{IOM}$ =45° (avec M dans le demi-cercle supérieur), le demi-cercle est partagé en 4 (car 45° = 180° ÷ 4) et l'arc de cercle IM vaut donc $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$: si $x = \frac{\pi}{4}$, alors $\widehat{IOM} = 45°$.

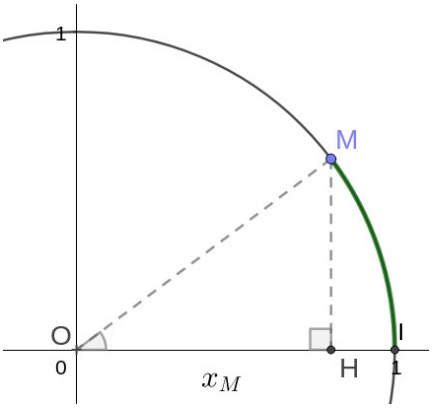
Lorsque $\widehat{IOM}$ =60° (avec M dans le demi-cercle supérieur), le demi-cercle est partagé en … et l'arc de cercle IM vaut donc $\frac{\pi}{} \approx$

Lorsque $\widehat{IOM}$ =30° (avec M dans le demi-cercle supérieur), le demi-cercle est partagé en … et l'arc de cercle IM vaut donc $\frac{\pi}{} \approx$

Angle en degré	0°	30°		60°		120°	180°
Un réel associé	0		$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$		$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$		π

Ces réels permettent de définir une nouvelle mesure d'angle : le radian. C'est la première nouveauté. La seconde est l'extension des définitions des cosinus et sinus dans le triangle rectangle.

Soit M un point du quart de cercle trigonométrique supérieur droit (l'angle $\widehat{IOM}$ est donc aigu).
On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. L'abscisse de M vaut donc OH et son ordonnée MH : x_M = OH et y_M = MH.



Dans le triangle OHM rectangle en H, l'hypoténuse est égale à 1 et on obtient donc les relations suivantes :

$$x_M = \cos\left(\widehat{IOM}\right) \text{ et } y_M = \sin\left(\widehat{IOM}\right)$$

En utilisant un réel x associé à l'angle $\widehat{IOM}$, on peut donc résumer ainsi :

$$\cos(x) = \text{abscisse de M et } \sin(x) = \text{ordonnée de M}$$

Ce qui est valable dans le quart de cercle trigonométrique supérieur droit va être étendu à tout le cercle trigonométrique pour donner une nouvelle définition du cosinus et du sinus : pour tout réel x, et plus seulement pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, en notant M le point correspondant sur le cercle trigonométrique, on décide d'appeler cos(x) l'abscisse de M et sin(x) l'ordonnée de M. Ces définitions sont cohérentes avec celles du collège et en constitue une extension.

Fonctions trigonométriques : Radian, sinus et cosinus

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

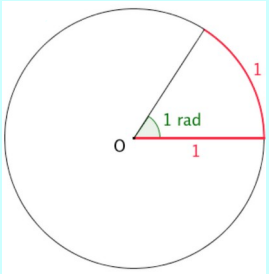
Dans ce chapitre, nous allons définir une nouvelle unité de mesure des angles, aborder intuitivement la notion d'angle orienté, et redéfinir le sinus et le cosinus en étendant les définitions du collège pour ne plus être limité aux seuls angles aigus.

I. Le radian

Définition. Dans un repère orthonormé d'origine O, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

Le radian est l'unité de mesure des angles du système international d'unités (SI).

Définition. Le radian, noté rad, est la mesure d'un angle qui intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de longueur 1.



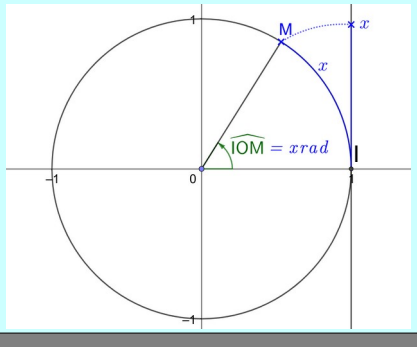
Voyons comment comprendre cette unité de mesure des angles.

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = 1$ (voir ci-dessous).

En « enroulant » cette droite graduée à partir du point I(1;0) sur le cercle trigonométrique (illustrations en vidéo et en animation) :

- à tout réel x est associé un seul point M du cercle trigonométrique ;
- à tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels.

Définition. On appelle mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$ tout nombre réel x associé au point M.



Cette définition appelle trois remarques.

D'abord, la mesure en radian d'un angle $\widehat{IOM}$ compris entre 0° et 360° ($0 \leq x \leq 2\pi$) correspond donc à la longueur de l'arc de cercle IM.

Ensuite, l'angle $\widehat{IOM}$ est ainsi « orienté » de I vers M : si M' est le symétrique de M par rapport à (OI), l'angle $\widehat{IOM'}$ a pour mesure $-x$.

Enfin, une mesure en radian est par définition un nombre réel (donc sans unité) : x rad $= x$. L'unité pourra donc ne pas être écrite.

Théorème. 360° = 2π rad 180° = π rad 90° = $\frac{\pi}{2}$ rad

Démonstration. 360° correspond au tour complet du cercle. Or le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π. D'où la première égalité. Les autres correspondent au demi-cercle trigonométrique et au quart de cercle trigonométrique.

Exemple 1. Déterminer une mesure en radian d'un angle de 45° puis déterminer la mesure en degré d'un angle de $\frac{3\pi}{4}$.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité. Il donne les mesures les plus utilisées. Il faut les connaître par cœur.

Mesure en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Démonstration. Par proportionnalité.

Exemple 2. Déterminer une mesure en radian d'un angle de 20°. Déterminer la mesure en degré d'un angle de $\frac{5\pi}{12}$.

Méthode : pour convertir des mesures d'angles, on peut utiliser leur proportionnalité.

Exemple 3. Marquer le point M correspondant à $\frac{3\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique et le point N correspondant à $-\frac{\pi}{4}$.

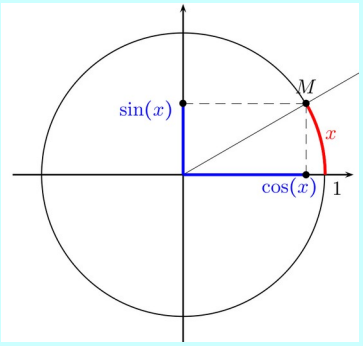
Méthode : pour placer un point sur le cercle trigonométrique, on peut utiliser un partage du cercle trigonométrique.

II. Le cosinus et le sinus d'un réel

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport entre la longueur du côté adjacent à l'angle et l'hypoténuse et le sinus d'un angle aigu est égal au rapport entre entre la longueur du côté opposé à l'angle et l'hypoténuse. Ces définitions sont possibles parce que ces rapports trigonométriques ne dépendent que des angles et non des longueurs des côtés. Mais elles ne sont valables que pour des angles aigus. Nous allons étendre ces définitions en redéfinissant le cosinus et le sinus d'un angle grâce au cercle trigonométrique.

Définitions. Soient x un angle en radian et $M(x_M\,;y_M)$ le point du cercle trigonométrique associé à x.

On appelle cosinus de x l'abscisse de M et sinus de x l'ordonnée de M.



$\cos(x) = x_M$ et $\sin(x) = y_M$

Lorsque $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ (angle aigu), cette définition correspond alors à celle du cosinus dans un triangle rectangle. En effet, l'hypoténuse du triangle rectangle est alors le rayon du cercle trigonométrique et vaut donc 1.

Quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus doivent être connues.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

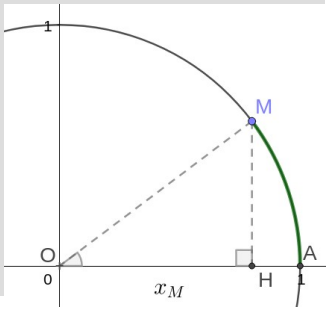
Démonstrations (indications). Les cosinus et sinus des cas $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ s'obtiennent directement.

Si $x = \frac{\pi}{3}$ (60°), le triangle OAM est équilatéral donc H est le milieu de [OA] ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x_M = \text{OH} = \frac{1}{2}.$$

En appliquant ensuite le théorème de Pythagore dans OMH, on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_M = \text{HM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



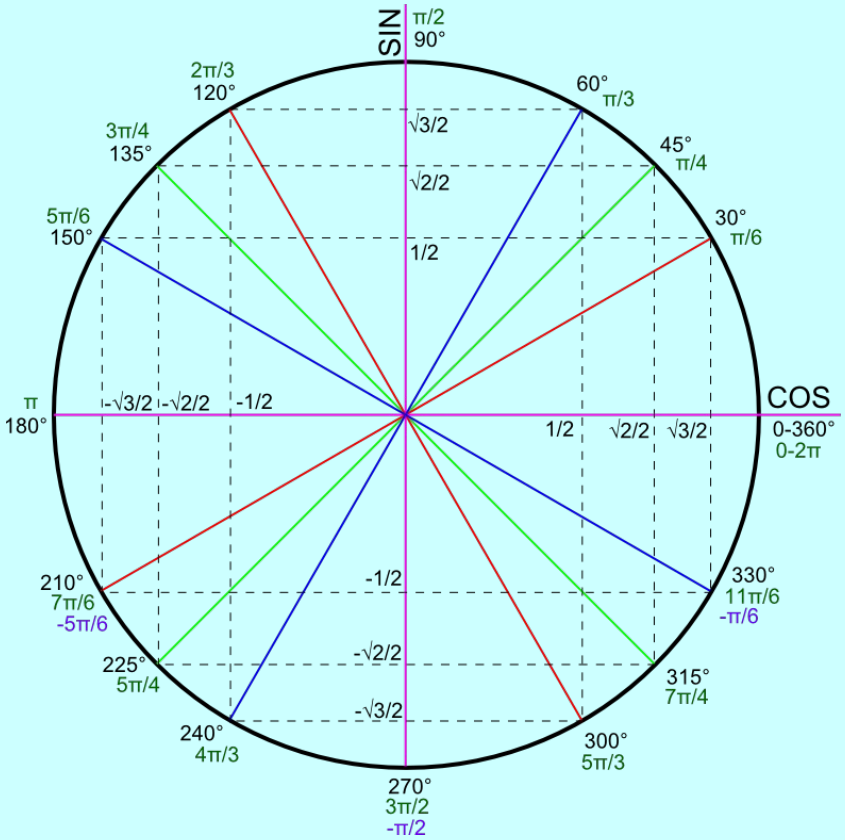
Ensuite, si $x = \frac{\pi}{6}$ (30°), le triangle OHM est égal à celui de la démonstration ci-dessus en permutant les côtés OH et HM ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Enfin, $x = \frac{\pi}{4}$ (45°), le triangle rectangle OHM est isocèle en H et le théorème de Pythagore permet d'obtenir :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = x_M = y_M = \text{OH} = \text{HM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Cercle trigonométrique avec valeurs remarquables à savoir retrouver



Démonstrations (indication). Par symétries axiale ou centrale.

Exemple 4. Donner l'arrondi au centième de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Méthode : pour déterminer le sinus ou le cosinus d'un réel, on peut utiliser la calculatrice.

Exemple 5. Donner une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ tel que $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = -0{,}3$.

Méthode : pour déterminer des sinus et cosinus, on peut utiliser la calculatrice.

Exemple 6. Résoudre sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Méthode : pour déterminer un réel connaissant son sinus ou son cosinus, on peut lire le cercle trigonométrique.

III. Propriétés

Théorème. Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. Par le théorème de Pythagore.

Fonctions trigonométriques : Radian, sinus et cosinus

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

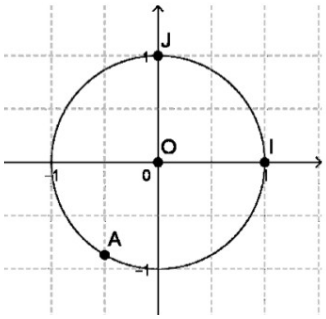
Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer une mesure en radian d'un angle de 80°.

2. Déterminer la mesure en degré d'un angle de $\frac{7\pi}{12}$.

3. Marquer le point M correspondant à $\frac{5\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique et le point N correspondant à $-\frac{7\pi}{4}$.

4. Dans un repère orthonormal, à quel réel peut-on associer le point A, placé ci-contre sur le cercle trigonométrique ?



5. Donner trois réels associés au point I placé ci-contre sur le cercle trigonométrique.

6. Donner deux réels associés au point J placé ci-contre sur le cercle trigonométrique.

7. Donner la mesure comprise entre -π et π de $\frac{13\pi}{3}$.

8. Donner la mesure comprise entre -π et π de $\frac{11\pi}{6}$.

9. Donner la mesure comprise entre 0 et 2π de $\frac{11\pi}{6}$.

10. Donner l'arrondi au centième de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

11. Déterminer $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

12. Résoudre dans l'intervalle [0 ; π[l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Fonctions trigonométriques : Fonctions sinus et cosinus

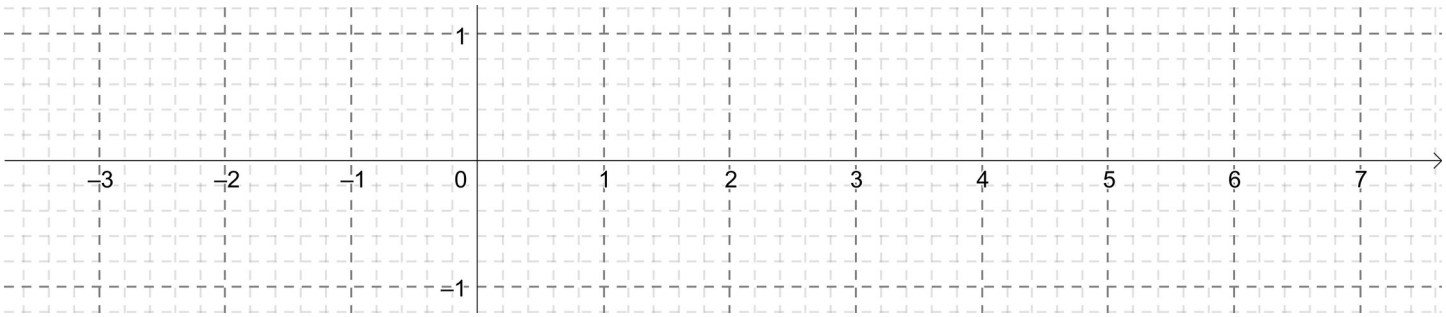
« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

Activité 1. Pour chaque réel x, on peut calculer le réel $\cos(x)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ une nouvelle fonction : la fonction **cosinus**.
L'objectif de cette activité est de représenter dans un repère orthonormal quelques points de la représentation graphique de la fonction cosinus.

1. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau suivant (arrondir au centième).

x	0	$\frac{\pi}{6} \approx$	$\frac{\pi}{4} \approx$	$\frac{\pi}{3} \approx$	$\frac{\pi}{2} \approx$ .....
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$	$\frac{1}{2}$	0

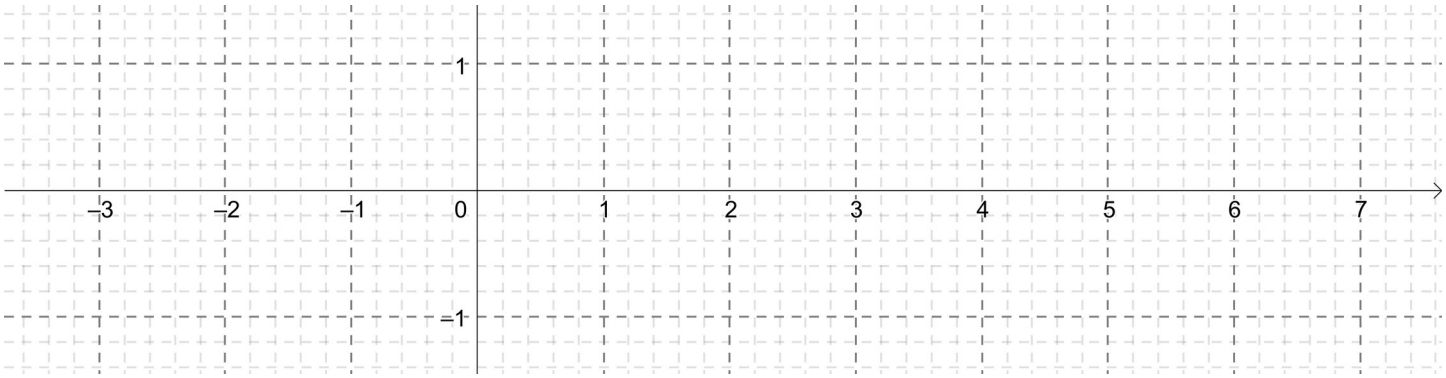
2. Dans le repère ci-dessous, en prenant les valeurs approchées arrondies au centième de $\cos(x)$, marquer les points de la représentation graphique de la fonction cosinus d'abscisses –3,8, –3,6… 7,4, 7,6.



3. a. La représentation graphique de la fonction cosinus sur $[-\pi\ ;\pi]$ semble présenter un élément de symétrie. Lequel ?

b. La représentation graphique de la fonction cosinus semble pouvoir être complétée par des translations successives à partir d'un motif de base. Encadrer un motif de base.

4. Construire de la même façon la représentation graphique de la fonction sinus.



5. a. La représentation graphique de la fonction sinus sur $[-\pi\ ;\pi]$ semble présenter un élément de symétrie. Lequel ?

b. La représentation graphique de la fonction sinus semble pouvoir être complétée par des translations successives à partir d'un motif de base. Encadrer un motif de base.

https://www.geogebra.org/m/XAfzNBY2

Fonctions trigonométriques : Fonctions sinus et cosinus

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

Pour chaque réel x, on peut calculer le réel $\cos(x)$ et le réel $\sin(x)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ deux nouvelles fonctions : la fonction **cosinus** et la fonction **sinus**. Le cercle trigonométrique fournit entre autres des propriétés de périodicité et de parité de ces fonctions.

I. La fonction cosinus

Une fonction f est paire sur $\mathbb{R}$ si pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

Géométriquement, sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

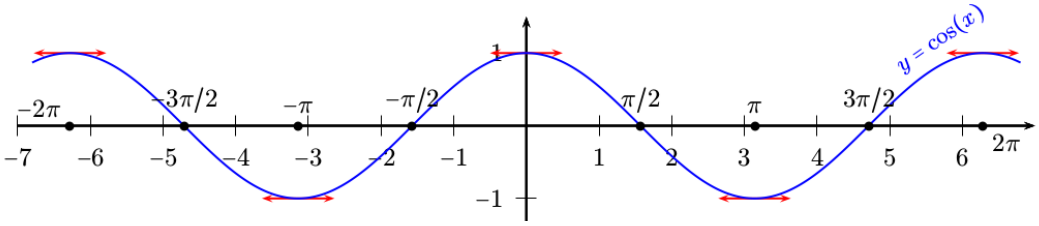
Théorème. Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est paire.

Une fonction f est périodique sur $\mathbb{R}$ s'il existe un réel T tel que, pour tout réel x, $f(x + T) = f(x)$. On dit alors que T est **une période** de la fonction f. La plus petite période strictement positive d'une fonction périodique est appelée **la période** de la fonction.

Théorème. Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est 2π-périodique ou encore que la fonction cosinus est périodique de période 2π.

2π est la plus petite période strictement positive de la fonction cosinus (4π, -2π, 6π sont aussi des périodes de la fonction cosinus).

Géométriquement, la représentation graphique de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$ s'obtient à partir de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ par des translations successives selon le vecteur de coordonnées $\vec{u}\ (2\pi\,;0)$ pour la partie de droite et selon le vecteur $-\vec{u}$ pour la partie de gauche.



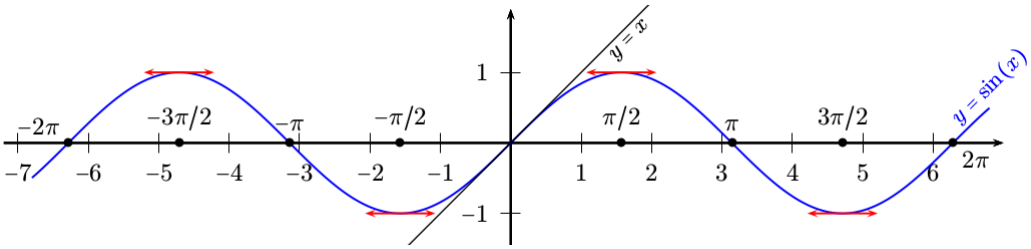
II. La fonction sinus

Une fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$ si pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

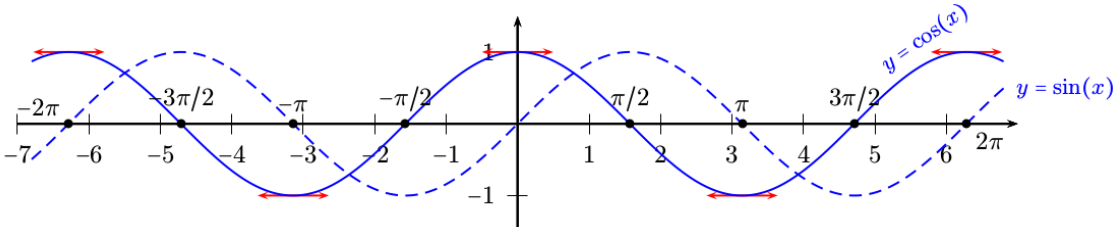
Géométriquement, sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème. Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est donc impaire.

Théorème. Pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. La fonction sinus est donc aussi 2π-périodique ou encore la fonction sinus est périodique de période 2π.



Et en représentant ces deux fonctions dans le même repère, on obtient :

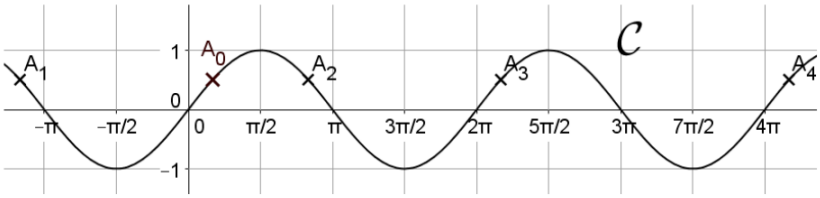


Fonctions trigonométriques : Fonctions sinus et cosinus

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

Les questions sont indépendantes.

1. On a représenté ci-dessous la courbe C de la fonction sinus dans un repère orthogonal.



A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sont des points de C et ils ont tous la même ordonnée.

Parmi les segments suivants, lequel a pour longueur la plus petite période de la fonction sinus ?

a) $[A_0 ; A_1]$ b) $[A_0 ; A_2]$ c) $[A_0 ; A_3]$ d) $[A_0 ; A_4]$

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \sin x - \cos x$. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule est correcte. Laquelle ?

a) f est une fonction paire b) f est une fonction impaire c) f n'est ni paire ni impaire d) $f(0) = 0$

3. t est un réel. On sait que $\cos(t) = \dfrac{2}{3}$. Alors $\cos(t + 4\pi) + \cos(-t)$ est égal à :

a) $-\dfrac{4}{3}$ b) 0 c) $\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$

4. Sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ a pour solution(s) :

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$

5. On a $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$ et $\cos x = 0{,}8$. Alors :

a) $\sin x = 0{,}6$ b) $\sin x = -0{,}6$ c) $\sin x = -0{,}2$ d) $\sin x = 0{,}2$

Exercice 1

On applique une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit électrique comportant en série une résistance et une diode idéale.

Le temps t est exprimé en seconde.

La tension est donnée par la fonction u définie pour tout réel $t \geq 0$ par :

$$u(t) = \sqrt{3}\ \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

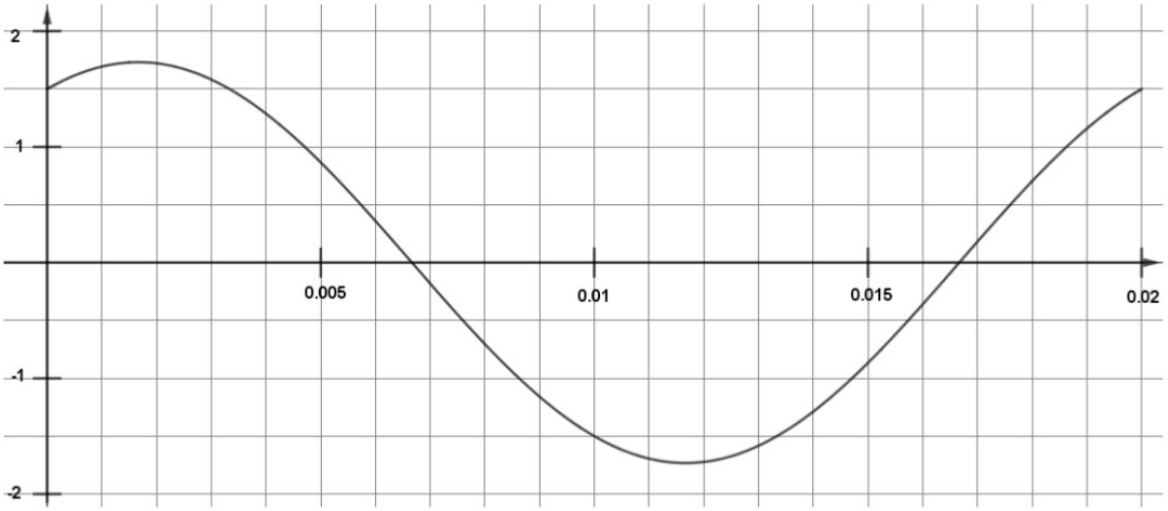
La diode est non passante si $u(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. La diode est-elle passante à l'instant $t = 0$?

2. Calculer $u\left(\frac{1}{100}\right)$. Interpréter le résultat.

3. On admet que $u\left(t + \frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout réel $t \geq 0$. En déduire une propriété de la fonction u.

4. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction u sur l'intervalle [0 ; 0,02] :



On cherche à savoir au bout de combien de temps la diode devient non passante pour la première fois. On admet que la fonction u est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{600}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{600}\ ;\ \frac{7}{600}\right]$.

a. Conjecturer la solution du problème à l'aide du graphique.

b. Vérifier la conjecture émise à la question a.