Calcul vectoriel et produit scalaire

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Un nouvel outil

- Activités
- Cours
- Exercices

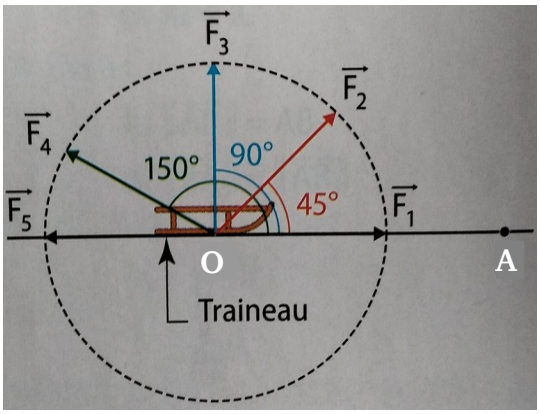
2. Propriétés et applications

- Activités
- Cours
- Exercices

Calcul vectoriel et produit scalaire : un nouvel outil

« Si la mathématique m'a donnée joies à profusion et continue à me fasciner dans mon âge mûr, ce n'est pas par les démonstrations que j'aurais su lui arracher, mais par l'inépuisable mystère et l'harmonie parfaite que je sens en elle, toujours prête à se révéler à une main et un regard aimants. » Alexandre Grothendieck

Activité. Un traîneau se déplace sur une trajectoire rectiligne de O vers A. On exerce tour à tour une des 5 forces $\vec{F_1}$ à $\vec{F_5}$ sur le traîneau et on s'intéresse à son influence sur le déplacement. Chaque force à la même intensité mais une direction et un sens différents.



1. Classer ces forces en trois catégories selon leur influence sur le mouvement : celles qui génèrent un travail positif sur le mouvement, celles qui génèrent un travail négatif et celles qui sont neutres.

2. On donne OA = 8 et $\|\vec{F_1}\| = 5$. On convient que le travail de la force $\vec{F_1}$ pendant le déplacement vaut alors 40.

   a. Déterminer le travail de la force $\vec{F_5}$ et celui de la force $\vec{F_3}$.

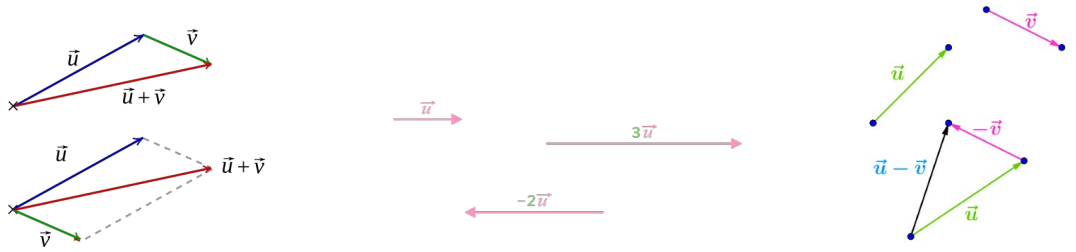
   b. Décomposer la force $\vec{F_2}$ en une force horizontale agissante et une force verticale neutre. Déterminer l'intensité de la force horizontale et en déduite le travail de $\vec{F_2}$.

Le travail d'une force et le produit scalaire

Calcul vectoriel et produit scalaire : un nouvel outil

« Si la mathématique m'a donnée joies à profusion et continue à me fasciner dans mon âge mûr, ce n'est pas par les démonstrations que j'aurais su lui arracher, mais par l'inépuisable mystère et l'harmonie parfaite que je sens en elle, toujours prête à se révéler à une main et un regard aimants. » Alexandre Grothendieck

La découverte des vecteurs au collège et en seconde s'est accompagnée d'opérations sur ceux-ci : somme de deux vecteurs (avec par exemple la règle du parallélogramme), produit d'un vecteur par un nombre réel, et par combinaison, différence de deux vecteurs.



Nous allons étudier une nouvelle opération sur les vecteurs : le produit scalaire. L'adjectif scalaire signifie ici réel. Le produit scalaire est une opération qui, à partir de deux vecteurs, donne un nombre réel.

I. Deux expressions du produit scalaire

A. Par projection orthogonale

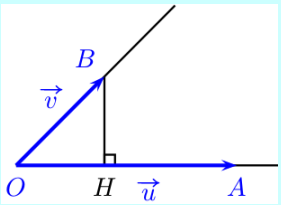
On rappelle – observer les schémas ci-dessous – que le projeté orthogonal d'un point B sur une droite (OA) est le point H de la droite (OA) tel que (BH)⊥(OA).

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

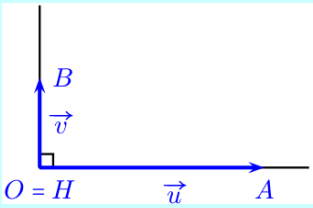
Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est un nombre réel défini ainsi :

Si l'un des deux vecteurs est nul, alors $\vec{u}.\vec{v}=0$;

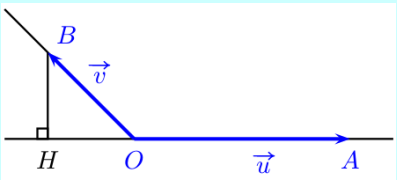
Si aucun des deux vecteurs n'est nul, alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA) :



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Pour calculer un produit scalaire de deux vecteurs qui n'ont pas la même origine, il faut donc commencer par se ramener à deux vecteurs de même origine.

Comme indiqué en introduction, le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. C'est une opération – c'est-à-dire une fonction – qui, à deux vecteurs, associe un nombre réel.

À ce stade, c'est bien l'extrémité B du second vecteur que l'on projette sur la droite (OA) : rien n'indique pour l'instant qu'en permutant les deux vecteurs et en projetant l'extrémité A sur la droite (OB) on obtienne le même résultat.

Le produit scalaire est noté avec un point : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. Il prendra soin dans le temps de découverte de cette notion de bien noter la multiplication des réels avec × : OA×OH et le produit d'un vecteur par un réel sans signe : 4 $\overrightarrow{OA}$. La somme de deux vecteurs comme la somme de deux réels continueront toutes deux à être notées avec le signe +.

Exemple 1. On considère un carré ABCD de côté 5 et E le milieu de [AB]. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Méthode : pour calculer un produit scalaire par projection orthogonale de deux vecteurs de même origine, on peut commencer par déterminer le projeté orthogonal de l'extrémité d'un des deux vecteurs sur la droite dirigée par l'autre.

Un premier cas particulier apparaît lorsque les deux vecteurs sont égaux. Ce cas sera souvent rencontré et possède un vocabulaire spécifique.

Définition. Le carré scalaire de $\overrightarrow{OA}$ est : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}^2 = OA^2$. Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Rappel : La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est sa longueur. Elle est notée $\|\vec{u}\|$.

Exemple 2. On considère un carré ABCD de côté 3. Calculer le carré scalaire de $\overrightarrow{AC}$.

Méthode : pour calculer un carré scalaire, on peut commencer par calculer la norme du vecteur.

B. À L'AIDE DES NORMES ET D'UN ANGLE

La redéfinition du cosinus d'un angle, incluant angles aigus, droit et obtus, permet de synthétiser les trois cas de la définition en une expression unique du produit scalaire de deux vecteurs.

Théorème. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

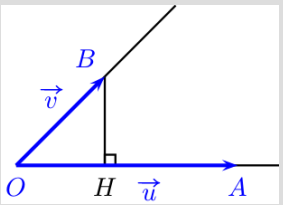
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$$

Démonstration. Examinons les trois cas possibles pour démontrer que cette formule est vraie à chaque fois.

- Dans le premier cas, l'angle $\widehat{AOB}$ est aigu. D'après la définition du produit scalaire, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$.

Il s'agit donc de prouver que $OA \times OH = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$ ce qui revient à prouver que :

$$OH = OB \times \cos(\widehat{AOB})$$



L'angle $\widehat{AOB}$ étant aigu, on peut appliquer la trigonométrie classique au triangle rectangle OBH, ce qui donne :

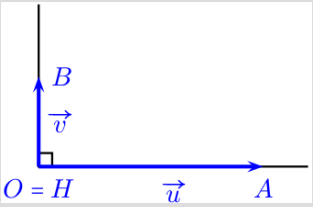
$$\cos(\widehat{AOB}) = \frac{OH}{OB} \quad \text{donc } OH = OB \times \cos(\widehat{AOB})$$

On a donc bien pour ce premier cas :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$$

- Dans le deuxième cas, l'angle $\widehat{AOB}$ est droit (attention, la trigonométrie classique ne s'applique plus, on est bien dans la définition du cosinus étendue). D'après la définition du produit scalaire, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. Il s'agit donc de prouver que :

$$0 = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$$



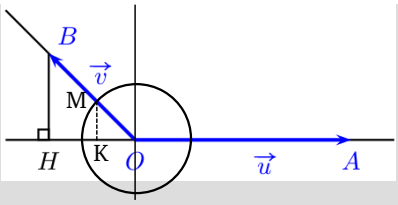
C'est ici direct puisque : $\cos(\widehat{AOB}) = 0$. Le deuxième cas est ainsi démontré.

- Dans le dernier cas, l'angle $(\widehat{AOB})$ est obtus. D'après la définition du produit scalaire, on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$. Il s'agit donc de prouver que $-OA \times OH = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$ ce qui revient à prouver que :

$$OH = -OB \times \cos(\widehat{AOB})$$

On introduit le repère de centre O avec (OA) comme axe des abscisses. On note M le point d'intersection du cercle trigonométrique avec la demi-droite [OB) et K son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses



D'abord, d'après la définition étendue du cosinus, on a : $\cos\left(\widehat{AOB}\right) = -\,OK$ (le cosinus est négatif, c'est l'abscisse du point M : ne pas oublier que OK est une longueur).

Ensuite, d'après le théorème de Thalès, le droite (HB) et (KM) étant parallèles : $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OK}{OH}$. Il vient, puisque OM = 1 (M est sur le cercle trigonométrique : OH = OB × OK . On a alors, puisque $\cos\left(\widehat{AOB}\right) = -\,OK$:

$$OH = -\,OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

On a donc bien aussi dans ce dernier cas :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

Exemple 3. ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 5 et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

Méthode : pour calculer un produit scalaire connaissant les normes et l'angle de deux vecteurs de même origine, on peut appliquer directement le théorème.

II. Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux s'ils forment un angle droit.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Théorème. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

Démonstration. Direct d'après la définition du produit scalaire.

Ce théorème permet de prouver la perpendicularité par un calcul, comme dans la réciproque du théorème de Pythagore. Il n'est pas inutile de rappeler que le déterminant de deux vecteurs permet de prouver leur colinéarité (le parallélisme) : $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $ab' - a'b = 0$ (c'est le critère de colinéarité).

Prouver la perpendicularité (ou le parallélisme) par des calculs se révélera très utile lorsque les méthodes purement géométriques échouent : la possibilité de transformer un problème de géométrie en un problème algébrique pour pouvoir déployer toute la puissance des outils de calculs est une des forces des mathématiques.

III. Propriétés du produit scalaire

Théorème (symétrie). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

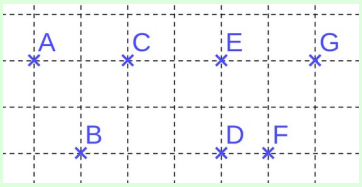
$$\vec{v}\,.\,\vec{u} = \vec{u}\,.\,\vec{v}$$

Démonstration. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et trois points O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. D'après l'expression du produit scalaire à l'aide des normes et d'un angle, on a :

$$\vec{v}\,.\,\vec{u} = \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos\left(\widehat{AOB}\right) = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right) = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \vec{u}\,.\,\vec{v}$$

Exemple 4. L'unité de longueur est le côté d'un carreau du quadrillage.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AE}$.



Théorème. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan, et a un réel.

$$(a\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(a\,\vec{v}) = a\times(\vec{u}.\vec{v})$$

Démonstration. Il faut distinguer trois cas selon le signe de a.

- Si $a = 0$, le cas est trivial (évident) puisque tous les membres sont égaux à 0.
- Si $a > 0$, alors :

$$(a\,\vec{u}).\vec{v} = \|a\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(a\vec{u};\vec{v}) = a\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v}) = a\times(\vec{u}.\vec{v})$$

et de même :

$$\vec{u}.(a\,\vec{v}) = \|\vec{u}\|\times\|a\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};a\vec{v}) = \|\vec{u}\|\times a\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v}) = a\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v}) = a\times(\vec{u}.\vec{v})$$

- Si $a < 0$, c'est plus délicat. Il faut une propriété du cosinus qui n'a pas été donné en trigonométrie :

$$\cos(-\vec{u};\vec{v}) = -\cos(\vec{u};\vec{v}) \quad \text{et} \quad \cos(\vec{u};-\vec{v}) = -\cos(\vec{u};\vec{v})$$

$$(a\,\vec{u}).\vec{v} = \|a\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(a\vec{u};\vec{v}) = -a\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(-\vec{u};\vec{v}) = a\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v}) = a\times(\vec{u}.\vec{v})$$

et de même :

$$\vec{u}.(a\,\vec{v}) = \|\vec{u}\|\times\|a\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};a\vec{v}) = \|\vec{u}\|\times(-a)\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};-\vec{v}) = a\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v}) = a\times(\vec{u}.\vec{v})$$

Les plus perspicaces remarqueront peut-être le lien entre la propriété de trigonométrie utilisée dans la démonstration pour le cas $a < 0$ et l'utilisation fréquente du théorème pour $a = -1$:

$$(-\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(-\vec{v}) = -(\vec{u}.\vec{v})$$

ce qui donne plus concrètement, si l'origine d'un vecteur est l'extrémité de l'autre :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}.(-\overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

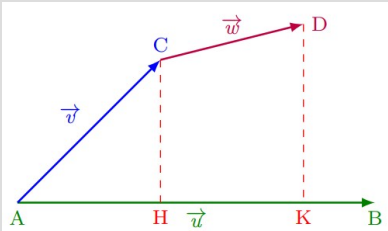
Théorème (distributivité). Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan.

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

Démonstration. Nous donnons seulement le cas particulier de la démonstration où les produits scalaires utilisés sont tous positifs.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan.

Soient A,B, C et D les points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$. On a alors :



$$\begin{aligned}
\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}) \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} \\
&= AB\times AK \\
&= AB\times(AH+HK) \\
&= AB\times AH + AB\times HK \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} \qquad \text{(si E est le point tel que } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} \text{ et L est son projeté sur (AB), alors AL = HK)} \\
&= \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}
\end{aligned}$$

Ces propriétés de symétrie et de distributivité permettent de prouver la « double distributivité » du produit scalaire sur l'addition des vecteurs et les « identités remarquables » correspondantes :

Théorème (double distributivité). Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ des vecteurs du plan.

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{w}+\vec{z}) = \vec{u}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{z} + \vec{v}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{z}$$

Démonstration. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan.

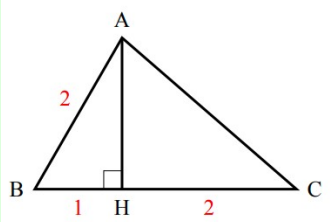
$$\begin{aligned}
(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{w}+\vec{z}) &= (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} + (\vec{u}+\vec{v}).\vec{z} \\
&= \vec{w}.(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{z}.(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= \vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v} + \vec{z}.\vec{u} + \vec{z}.\vec{v} \\
&= \vec{u}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{z} + \vec{v}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{z}
\end{aligned}$$

Théorème. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2} \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\times\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2} \qquad (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$$

Démonstration. On utilise, comme pour les identités remarquables en algèbre, la double distributivité et la symétrie.

Exemple 5. On cherche à savoir si le triangle ABC est rectangle en A.



1. Développer puis calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$.

2. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$.

3. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

Calcul vectoriel et produit scalaire : Un nouvel outil

« Si la mathématique m'a donnée joies à profusion et continue à me fasciner dans mon âge mûr, ce n'est pas par les démonstrations que j'aurais su lui arracher, mais par l'inépuisable mystère et l'harmonie parfaite que je sens en elle, toujours prête à se révéler à une main et un regard aimants. » Alexandre Grothendieck

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. Soit ABCD un carré de côté 6 et I le milieu de [BC]. Alors le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}$ vaut :

a. –18 b. 18 c. 36 d. $9\sqrt{5}$

2. EFG est un triangle tel que EF = 8, FG = 5 et $\widehat{EFG} = \frac{3\pi}{4}$. Alors $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG}$ est égal à :

a. $20\sqrt{2}$ b. $-20\sqrt{2}$ c. $20\sqrt{3}$ d. $-20\sqrt{3}$

3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$.
$(\vec{u} + \vec{v}).(2\vec{u} - \vec{v})$ est égal à :

a. 6 b. 9 c. 13 d. 7

Exercice 2

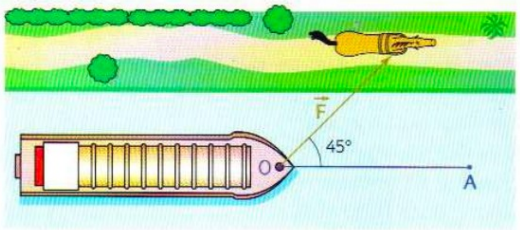
Le travail W (en J) d'une force $\vec{F}$ (en N) appliqué à un solide se déplaçant d'un point O à un point A (en m) est :

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OA}$$

C'est un indicateur de l'action d'une force sur le déplacement d'un objet : si W = 0, la force appliquée n'a pas d'incidence sur le déplacement ; si W < 0, la force appliquée s'oppose au déplacement ; si W > 0, la force contribue au déplacement.

Pour tirer sur 50 m de O à A une péniche, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force $\vec{F}$ d'une intensité de 2 000 N selon un angle constant de 45° par rapport au déplacement.

Les résultats seront arrondis à l'unité.



1. Calculer le travail W de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement.

2. Si la péniche était tirée selon un angle de 30°, quel serait le travail W de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement ?

3. Si la péniche était tirée sur 100 m, quel serait le travail W de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement ?

Exercice 3

ABCD est un parallélogramme tel que : AB = 7, AD = 3 et AC= 8. On note H le projeté orthogonal de D sur (AC).

1. Faire une figure.

2. a. Développer le carré scalaire $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$ et en déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$.

   b. Montrer que $\cos(\widehat{BAD}) = \frac{1}{7}$ et en déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAD}$ en degré, arrondie au dixième.

3. a. Développer le carré scalaire $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})^2$ et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

   b. En déduire la longueur AH.

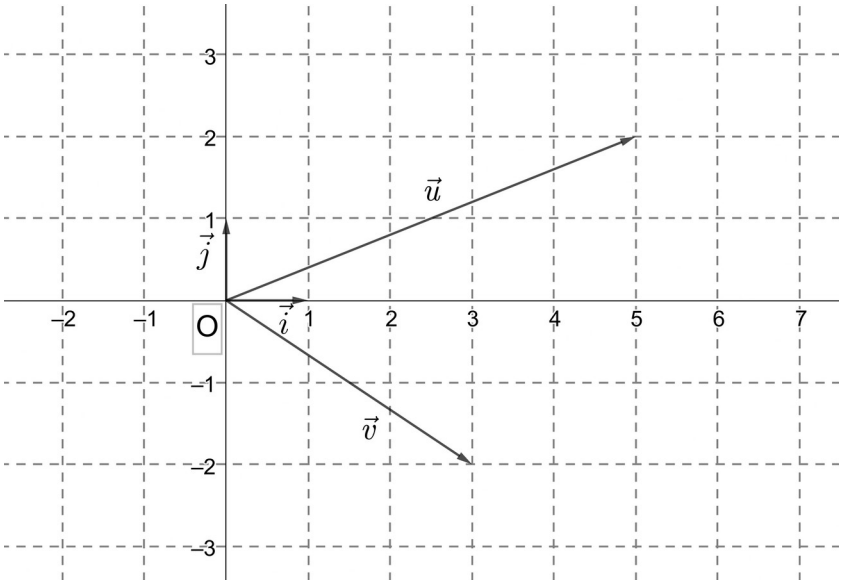
Calcul vectoriel et produit scalaire : Applications

« Si la mathématique m'a donnée joies à profusion et continue à me fasciner dans mon âge mûr, ce n'est pas par les démonstrations que j'aurais su lui arracher, mais par l'inépuisable mystère et l'harmonie parfaite que je sens en elle, toujours prête à se révéler à une main et un regard aimants. » Alexandre Grothendieck

Activité. Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les deux vecteurs $\vec{u}$ (5 ; 2) et $\vec{v}$ (3 ; –2). L'objectif est de calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
3. En déduire le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

4. Déterminer une expression générale du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ $(x\,;y)$ et $\vec{v}$ $(x'\,;y')$ en fonction de leurs coordonnées.



Calcul vectoriel et produit scalaire : Applications

« Si la mathématique m'a donnée joies à profusion et continue à me fasciner dans mon âge mûr, ce n'est pas par les démonstrations que j'aurais su lui arracher, mais par l'inépuisable mystère et l'harmonie parfaite que je sens en elle, toujours prête à se révéler à une main et un regard aimants. » Alexandre Grothendieck

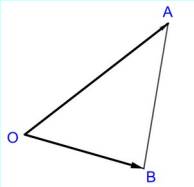
On a vu dans la 1re partie de ce cours que le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. S'il a permit au début de modéliser la notion de travail d'une force sur un déplacement en physique, il permet aussi de calculer des longueurs et des angles, ce qui en fait un outil géométrique puissant.

I. Encore d'autres expressions du produit scalaire

A. À l'aide des normes

Théorème : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2 - AB^2\right) \text{ et plus généralement } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$



Démonstration. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$. On a donc :

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\times \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 - 2\times \vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\times \vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

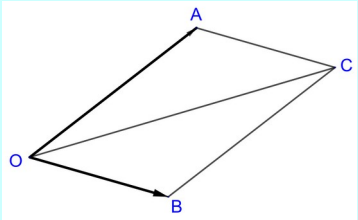
$$2\times \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

La 1re égalité s'obtient quant à elle en prenant $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ car $\|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 = BA^2 = AB^2$.

Théorème : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A, B et C quatre points tels que OACB soit un parallélogramme.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left(OC^2 - OA^2 - OB^2\right) \text{ et plus généralement } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$



Démonstration. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$. On a donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 + 2\times \vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\times \vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$2\times \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

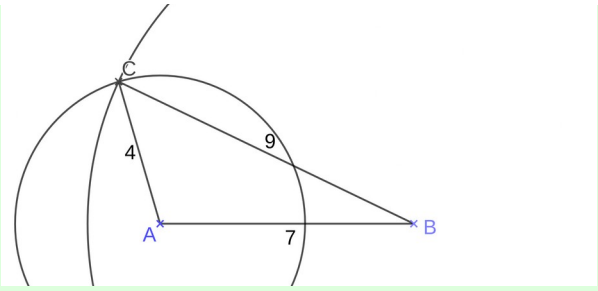
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

La 1re égalité s'obtient aussi en prenant $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$: $\|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\|^2 = \|\overrightarrow{OC}\|^2 = OC^2$

Exemple 1. Un triangle ABC est tel que AB = 7 cm, AC = 4 cm et BC= 9 cm. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Solution. On applique le 1er théorème :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(7^2 + 4^2 - 9^2\right) = -8.$$



Remarque : le produit scalaire est négatif car l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

B. À L'AIDE DES COORDONNÉES

Si, dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$, alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

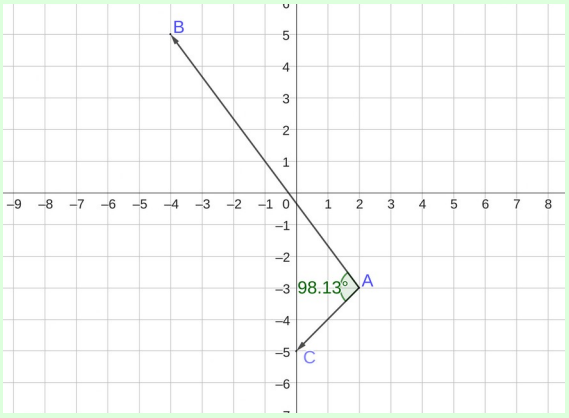
Théorème. Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u}\ (x\,;y)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y')$.

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration. Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,\vec{v} &= (x\,\vec{i} + y\,\vec{j}).(\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j})\\ &= xx'\,\vec{i}^{\,2} + xy'\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + yx'\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + yy'\,\vec{j}^{\,2}\\ &= xx' \times 1 + xy' \times 0 + yx' \times 0 + yy' \times 1\\ &= xx' + yy'\end{aligned}$$

Exemple 2. Dans un repère orthonormé, soient A(2 ; – 3), B(– 4 ; 5) et C(0 ; – 5). Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.



Solution. On détermine les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-2\\5-(-3)\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\-5-(-3)\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$

Le théorème donne alors :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -6 \times (-2) + 8 \times (-2) = -4$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -4$$

Remarque : le produit scalaire est négatif car l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus ici aussi.

Le gros point fort de ce théorème, c'est qu'il n'est pas nécessaire que les vecteurs aient la même origine.

II. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

A. FORMULE D'AL-KASHI

Théorème d'Al-Kashi. Soit un triangle ABC. On a alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Démonstration. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, on obtient :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^{\,2} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^{\,2} + 2\times\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^{\,2} = BA^2 - 2\times\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} + AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$$

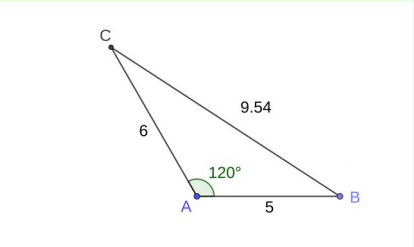
Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ donc on obtient :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Ce théorème généralise le théorème de Pythagore, qui est un cas particulier lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit (on a alors $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0$).

Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a alors : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\widehat{A})$. Cette écriture du théorème d'Al-Kashi est souvent utilisée.

Exemple 3. Soit ABC un triangle avec AB = 5, AC = 6 et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer la longueur BC.

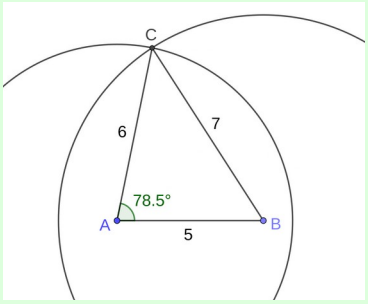


Solution. Le théorème d'Al-Kashi donne :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) \\ &= 5^2 + 6^2 - 2\times 5\times 6\times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 91 \end{aligned}$$

et ainsi : $BC = \sqrt{91}$.

Exemple 4. Soit ABC un triangle avec AB = 5, AC = 6 et BC = 7. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.



Solution. Le théorème d'Al-Kashi donne :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) \\ 7^2 &= 5^2 + 6^2 - 2\times 5\times 6\times\cos(\widehat{BAC}) \\ 49 &= 61 - 60\times\cos(\widehat{BAC}) \\ 60\times\cos(\widehat{BAC}) &= 12 \\ \cos(\widehat{BAC}) &= 0{,}2 \end{aligned}$$

et la calculatrice fournit : $\widehat{BAC} \approx 78{,}5°$.

B. Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

Théorème. L'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration. On note O le milieu du segment [AB].

On a donc, pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{MO}^{\,2} - \overrightarrow{OA}^{\,2} \\ &= MO^2 - OA^2 \end{aligned}$$

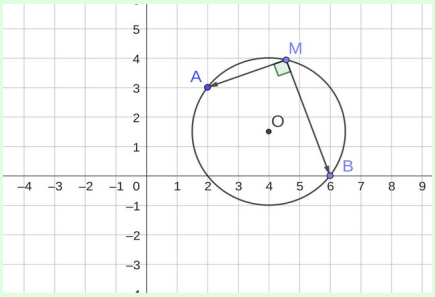
On en déduit que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $MO^2 - OA^2 = 0$ ce qui équivaut à $MO^2 = OA^2$.

Enfin, comme OM et OA sont des distances, on obtient que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est équivalent à OM = OA (égalité caractérisant l'appartenance de M au cercle de centre O et de rayon OA).

On a ainsi démontré que l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

On peut remarquer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ signifie, si M est distinct de A et de B, que le triangle ABM est rectangle en M. On a donc une preuve que le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre [AB].

Exemple 5. Dans un repère orthonormé, soient A le point de coordonnées (2 ; 3) et B le point de coordonnées (6 ; 0). Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$? Préciser ses éléments caractéristiques.



Solution. D'après le théorème, l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Il a pour centre le milieu O du segment [AB] : $O\begin{pmatrix}\frac{2+6}{2}\\ \frac{3+0}{2}\end{pmatrix}$ soit $O\begin{pmatrix}4\\1{,}5\end{pmatrix}$.

Son rayon est : $r = AB \div 2 = \sqrt{(6-2)^2+(0-3)^2} \div 2 = 2{,}5$.

Calcul vectoriel et produit scalaire : Applications

« Si la mathématique m'a donnée joies à profusion et continue à me fasciner dans mon âge mûr, ce n'est pas par les démonstrations que j'aurais su lui arracher, mais par l'inépuisable mystère et l'harmonie parfaite que je sens en elle, toujours prête à se révéler à une main et un regard aimants. » Alexandre Grothendieck

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. On considère un triangle ABC tel que AB = 3, BC = 5 et AC = 6. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. On considère un parallélogramme ABCD tel que AB = 3, BC = 5 et AC = 6. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
3. Dans un repère orthonormé, on considère les points A(–1 ; –2), B(2 ; 0), C(3 ; –1) et D(–3 ; 4). Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Exercice 2

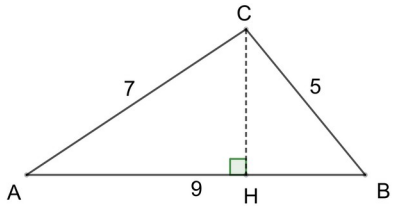
On donne trois points A(4 ; 1), B(2 ; 3) et C(– 2 ; – 1).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Dans un repère orthonormé d'unité un cm ou un gros carreau, marquer les points A, B et C et tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
4. En déduire que : $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de l'angle $\widehat{BAC}$.
5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 3

Un triangle ABC est tel que AB = 9 cm, AC = 7 cm et BC= 5 cm. L'objectif est de calculer l'aire de ce triangle.

On nomme H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C.



1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire la longueur AH.
3. Montrer que CH = $\dfrac{7\sqrt{11}}{6}$ cm.
4. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 4

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 5 et de largeur AD = 2.

Soit M un point du segment [AB] distinct de A et de B tel que AM = x.

1. Montrer que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 5x$.
2. Pour quelles valeurs de x les droites (MD) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?
3. Montrer que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = x^2 - 5x + 4$.
4. Pour quelles valeurs de x le triangle MCD est-il rectangle en M ?
5. Pour quelles valeurs de x l'angle $\widehat{CMD}$ est-il aigu ?