Nom et prénom : ____

Devoir surveillé de mathématiques n°5

La qualité de la copie, la présentation et la clarté des raisonnements compteront pour deux points.

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite a définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+5}$. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est non nul et on définit la suite w sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. a. Calculer u_1 et u_2. Vérifier que $u_2 = \dfrac{5}{9}$.

   b. La suite u est-elle arithmétique ?

2. a. Calculer w_0, w_1 et w_2.

   b. La suite w est-elle arithmétique ?

Exercice 2 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit ABCD un carré de côté 6 et I le milieu de [BC]. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}$?

2. ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 6 et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

3. Soit ABCD un parallélogramme avec AB = 3, AD = 4 et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$?

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

3 a. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

   b. Graphiquement, que peut-on en déduire pour C_f ?

4. Existe-t-il des tangentes à la courbe C_f parallèles à la droite d'équation $y = 2x$.

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°5

Exercice 1

1. a. En prenant $n = 0$, on obtient $u_1 = \dfrac{5u_0}{2u_0+5} = \dfrac{5\times 1}{2\times 1+5} = \dfrac{5}{7}$.

En prenant $n = 1$, on obtient $u_2 = \dfrac{5u_1}{2u_1+5} = \dfrac{5\times\frac{5}{7}}{2\times\frac{5}{7}+5} = \dfrac{5}{9}$.

b. $u_1 - u_0 = \dfrac{5}{7} - 1 = -\dfrac{2}{7} = -\dfrac{18}{63}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{5}{9} - \dfrac{5}{7} = -\dfrac{10}{63}$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

En conclusion, la suite u n'est pas arithmétique.

2. a. $w_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$

$w_1 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$

$w_2 = \dfrac{1}{u_2} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$

b. La suite w semble arithmétique de raison 0,4. Démontrons-le.

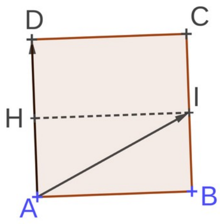
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\
&= \frac{2u_n+5}{5u_n} - \frac{1}{u_n} \\
&= \frac{2u_n+5}{5u_n} - \frac{5}{5u_n} \\
&= \frac{2u_n+5-5}{5u_n} \\
&= \frac{2u_n}{5u_n} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

On a démontré que la suite w est arithmétique de raison $\dfrac{2}{5}$.

Exercice 2

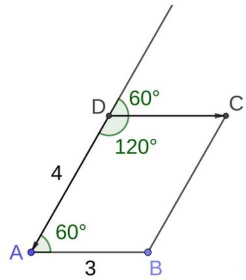
1. On note H le projeté orthogonal de I sur (AD).



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = AD \times AH = 6 \times 3 = 18$

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}$.

3. $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{ADC}$ est son supplémentaire donc $\widehat{ADC} = \frac{2\pi}{3}$.



$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = DA \times DC \times \cos(\widehat{ADC}) = 4 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -6.$

Exercice 3

1. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et pour tout réel $x \neq 2$, on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+5)\times 1}{(x-2)^2}$$

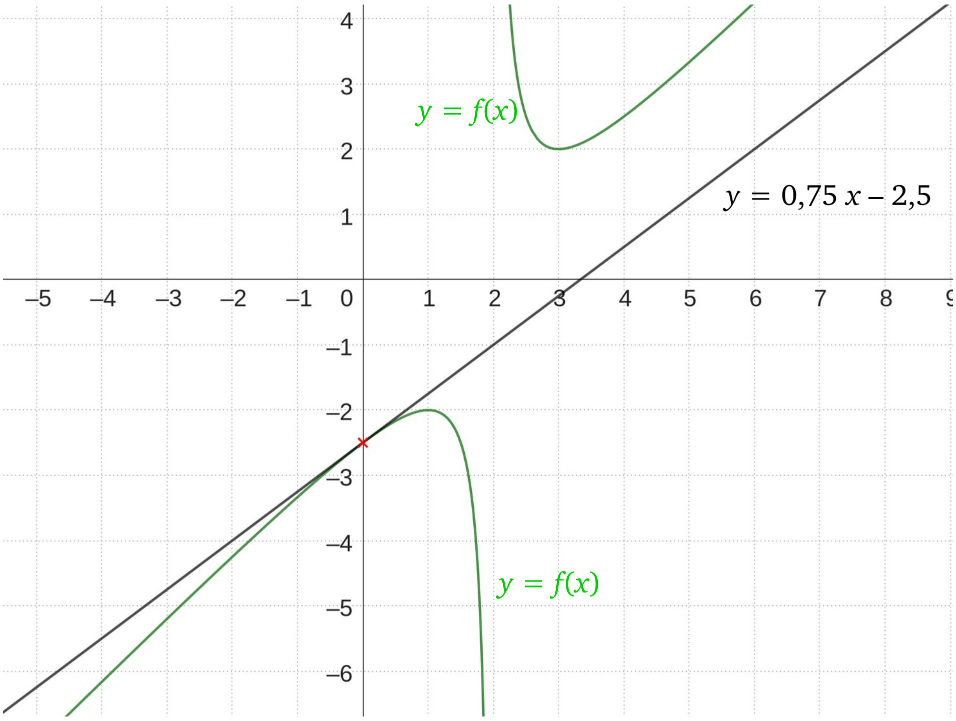
$$= \frac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

2. D'une part $f(0) = -\frac{5}{2}$ et d'autre part, $f'(0) = \frac{3}{4}$.

L 'équation réduite de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)\ (x-0) + f(0)$. Cela donne donc :

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$$



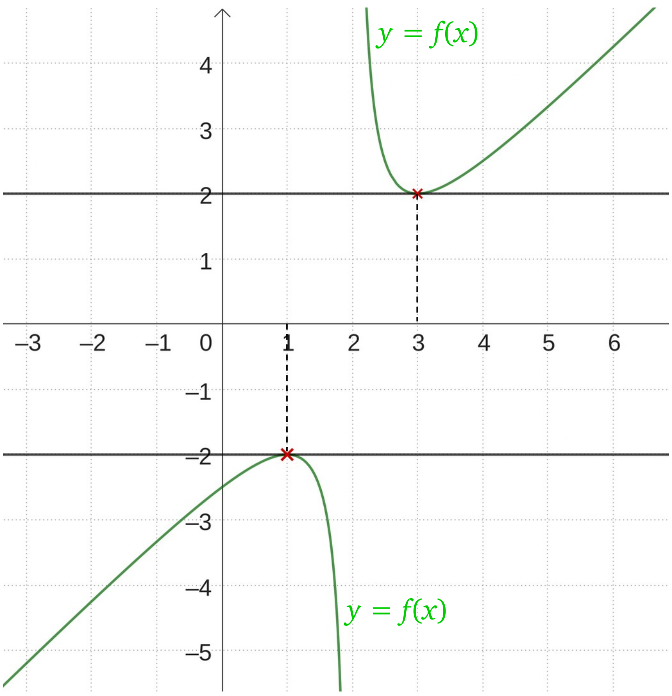
3 a. Le polynôme $x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré. 1 est une racine évidente : $1^2 - 4\times1 + 3 = 0$. Le produit des racines du polynôme valant 3, la seconde racine est 3 : $3^2 - 4\times3 + 3 = 0$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ sont donc 1 et 3.

b. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul donc, pour tout réel $x \neq 2$, l'équation $f\,'(x) = 0$ est équivalente à $x^2 - 4x + 3 = 0$.

On en déduit que les solutions de l'équation $f\,'(x) = 0$ sont 1 et 3.

Graphiquement, le nombre dérivé $f\,'(x)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en x, et lorsqu'il est nul, la tangente est horizontale.

On en déduit que la courbe C_f admet deux tangentes horizontales, l'une en $x = 1$ et l'autre en $x = 3$.



4. Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont les mêmes coefficients directeurs. Les tangentes à la courbe C_f parallèles à la droite d'équation $y = 2x$ doivent donc avoir un coefficient directeur égal à 2. Or, le coefficient directeur d'une tangente à la courbe C_f est $f'(x)$.

On cherche donc les réels $x \neq 2$ tels que $f'(x) = 2$.

$y = 0{,}75\,x - 2{,}5$

$$f'(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 2\,(x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 2\,(x^2 - 4x + 4)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 8x + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 5 = 0$$

L'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$ est une équation du second degré. Calculons son discriminant Δ .

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$

Le discriminant est strictement négatif donc l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$ n'a pas de solution réelle.

On en déduit qu'il n'existe pas de tangente à la courbe C_f parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.