

Comment travailler. On choisit un atelier, on le fait sur son cahier, on va chercher le corrigé, on se corrige soi-même, puis on demande la validation du professeur.

Comment naviguer. Cliquez sur les pastilles : les **bleues** restent dans ce document, les **dorées** ouvrent un fichier en ligne. Pour revenir à ce menu, cliquez sur le bandeau de titre en haut de la page où vous vous trouvez.

Le cours

La définition, le théorème, les règles de la somme et du produit avec leurs démonstrations, et les quatre exemples.

[Ouvrir le cours](#)

La vérification

QCM en deux parties : la définition et le théorème, puis les exemples du cours. Ni noté, ni chronométré.

[Ouvrir le QCM de vérification](#)

Les ateliers Réalisables dans l'ordre de votre choix. Obligatoires : 1 h 50.

	Intitulé	Type	Durée	Documents
A	Flashcards menteuses	CONSO.	15 min	Règle du jeu Flashcards en ligne
B	Du tableau à l'arbre	CAP. ATT.	30 min	Consignes Corrigé
C	La chasse aux erreurs	CONSO.	30 min	Consignes Corrigé
D	Le contrôle qualité	CAP. ATT.	30 min	Planche Consignes Corrigé
E	Dire, écrire, calculer	CAP. ATT.	25 min	Consignes Cartes Corrigé
F	La chaîne des chemins	CAP. ATT.	25 min	Consignes Dominos Corrigé
G	Auto-évaluation	CONSO.	20 min	Consignes QCM en ligne
H	Vers l'épreuve anticipée	APPROF.	20 min	Consignes Corrigé

« Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. » Alexandre Grothendieck

I. DÉFINITION

Définition. Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé** est notée $p_A(B)$ et est donnée par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

On dira en abrégé « p de B sachant A » pour $p_A(B)$.

On en déduit immédiatement que :

Théorème. Soient A et B deux événements.

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Démonstration. On multiplie chaque membre de l'égalité de la définition par $p(A)$, ce qui est légitime car $p(A) \neq 0$.

J'ajoute une remarque essentielle : $p_A(B)$ est une probabilité donc $0 \leq p_A(B) \leq 1$ (si vous obtenez un jour une probabilité conditionnelle qui n'est pas dans cet intervalle, c'est forcément une erreur).

Pour la suite, je vous propose de travailler avec un énoncé unique pour tous les exemples de ce cours.

Si vous avez le temps et un peu de curiosité, vous pouvez regarder une vidéo [sur les tests de dépistage](#) par Manu Houdart.

Maintenant, voici l'énoncé commun aux différents exemples de ce cours : dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus. La probabilité qu'une personne ait un test positif sachant qu'elle est contaminée est de 0,99 (pour les futurs soignants, on appelle cette probabilité la sensibilité du test). La probabilité qu'une personne qui n'est pas contaminée ait un test négatif est de 0,97 (cette probabilité étant appelée spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note C l'événement « la personne est contaminée par le virus » et P l'événement « le test est positif ».

Exemple 1. Quelle est la valeur de $p_C(P)$?

Solution. D'après l'énoncé, la probabilité que la personne ait un test positif sachant qu'elle est contaminée est de 0,99 : $p_C(P) = 0,99$.

Noter que les expressions « une personne a un test positif sachant qu'elle est contaminée » et « une personne contaminée a un test positif » sont équivalentes.

Exemple 2. Calculer la probabilité de l'événement $C \cap P$ et interpréter celle-ci.

Solution. D'après un théorème, $p(C \cap P) = p_C(P) \times p(C) = 0,99 \times 2\% = 0,0198$.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard soit contaminée et ait un test positif est 0,0198.

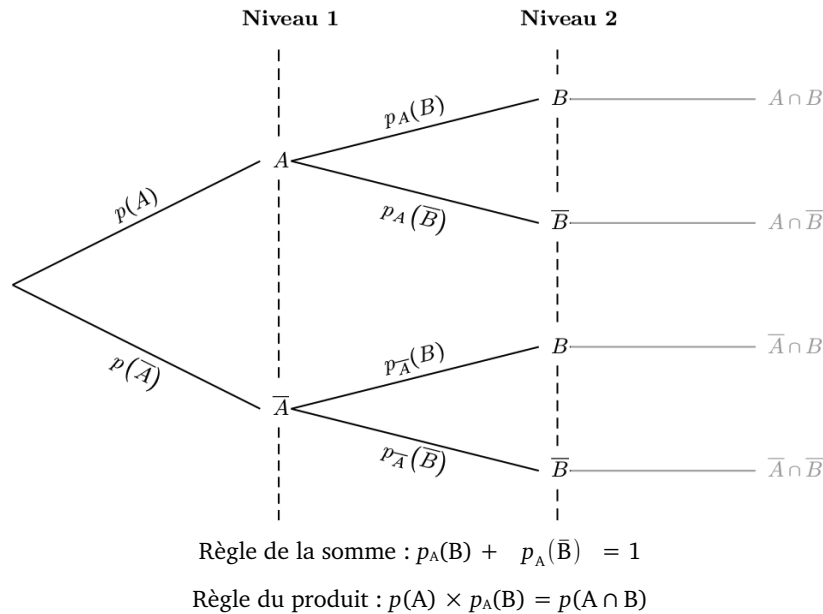
On peut donc déterminer des probabilités par la lecture de l'énoncé (exemple 1) ou par un calcul direct (exemple 2).

Grâce aux arbres pondérés, on va pouvoir représenter de façon condensée et très pratique cette situation : cette représentation va se révéler très efficace dans la résolution de problèmes de probabilités, comme lorsque l'on va chercher à connaître la probabilité $p_P(C)$ qu'une personne soit contaminée sachant que son test est positif (dans l'exemple 1, on a extrait de l'énoncé $p_C(P)$, noter la différence).

II. Arbres pondérés

Un arbre pondéré permet de modéliser certaines expériences aléatoires.

Arbre pondéré à deux **niveaux** et deux **branches** à chaque **nœud**



Règle de la somme. La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Démonstration. Distinguons les niveaux 1 et 2.

Pour tout événement A d'un univers Ω et $\bar{A}$ son événement contraire, on a, d'après un théorème de seconde :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

ce qui prouve la règle au niveau 1.

Maintenant, pour le niveau 2, il s'agit de montrer par exemple que $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$.

L'idée est de considérer l'événement A comme étant l'union de $A \cap B$ et de $A \cap \bar{B}$ (toute issue de A est soit dans B soit dans son contraire $\bar{B}$). On obtient :

$$\begin{aligned} p(A) &= p((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \\ &= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p((A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})) \quad (\text{d'après un autre théorème de seconde}) \\ &= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

En effet, $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ étant incompatibles (une issue ne peut être à la fois dans A, dans B et dans $\bar{B}$), $p((A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})) = 0$.

On a ainsi :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

ce qui donne, puisque $p(A) \neq 0$,

$$1 = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} + \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(A)}$$

et enfin, par définition :

$$p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$$

La démonstration est similaire pour les autres branches du niveau 2.

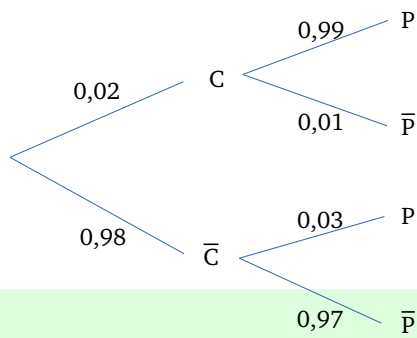
Exemple 3. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

Solution. $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0,02 = 0,98$

$$p_c(\bar{P}) = 1 - p_c(P) = 1 - 99 \% = 0,01$$

$$p_{\bar{c}}(P) = 1 - p_{\bar{c}}(\bar{P}) = 1 - 97 \% = 0,03$$

D'où l'arbre pondéré suivant :



Une succession de plusieurs branches reliées par des nœuds s'appelle un **chemin**. L'arbre ci-dessus possède quatre chemins.

Règle du produit. La probabilité de l'intersection des événements rencontrés le long d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin.

Démonstration. En suivant le chemin en haut de l'arbre, on rencontre les événements A et B et le théorème donne directement :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

La démonstration est similaire pour chaque chemin.

Exemple 4. On admet que la probabilité que le test soit positif est 0,0492. Déterminer la probabilité $p_P(C)$ qu'une personne soit contaminée sachant que son test est positif. Arrondir à 10^{-4} .

Solution. Par définition, $p_P(C) = \frac{p(C \cap P)}{p(P)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024$

La probabilité $p_P(C)$ qu'une personne soit contaminée **sachant** que son test est positif est 0,4024 (40,24%).

Avec ce dernier exemple, la boucle est bouclée : la probabilité recherchée n'apparaît pas sur l'arbre (elle appartient à l'arbre inverse, celui dont le niveau 1 est constitué de P et de $\bar{P}$) et il faut revenir à la définition de départ pour l'obtenir.

Objectifs : Mémoriser la définition, le théorème et les règles des arbres pondérés, et repérer une réponse fausse.

Matériel : Un ordinateur ou un téléphone **Durée :** 15 minutes — sans calculatrice

La règle du jeu

Le jeu comporte **12 cartes**, chacune identifiée par un code (F1, F2...) inscrit au-dessus du texte, sur ses deux faces. Ces codes sont dans le désordre : impossible de situer une carte en comptant.

Deux de ces douze cartes portent une réponse fausse. À vous de les débusquer.

Ouvrir les flashcards sur **MathaCoeur**. Cet atelier peut se faire **seul** ou à **deux**, en **s'interrogeant mutuellement**.

1. Les 12 cartes défilent une par une, dans un ordre aléatoire. Cherchez la réponse, puis cliquez sur la carte pour la retourner, **autant de fois que vous le souhaitez**.

2. Chaque carte porte au recto un **renvoi au cours** : en cas de doute, allez vérifier avant de vous prononcer. C'est le cœur de l'atelier.

3. Prononcez-vous ensuite : « **Juste** » (la carte ne reviendra plus), « **J'hésite** » (elle repart en fin de liste), « **Carte menteuse !** » (elle est placée dans l'un des deux emplacements affichés en haut de l'écran ; une croix permet de l'en retirer).

4. Le jeu s'arrête lorsque plus aucune carte n'est à examiner **et** que les deux emplacements sont occupés. S'il vous manque une menteuse, les cartes déclarées justes repassent : c'est que l'une d'elles ne l'était pas.

5. L'écran vous dit alors si vos deux cartes sont les bonnes, si une seule l'est — il précise laquelle — ou si aucune ne l'est. Dans les deux derniers cas, la chasse est à refaire.

6. Le bouton **Réinitialiser**, en haut à droite, relance le jeu depuis le début à tout moment.

★ AIDES ★

1. Ne vous fiez pas à votre impression : une réponse fausse est écrite exactement comme une réponse juste. Le seul juge est le cours, et le renvoi figure sur chaque carte.
2. Les deux erreurs ne sont pas de même nature. L'une est **franche** : l'énoncé lui-même est faux, et une autre carte du jeu le contredit. L'autre est **subtile** : la réponse est juste, c'est l'exemple qui l'accompagne qui ne l'est pas.
3. Prenez l'habitude de **vérifier les exemples numériques** : ils se contrôlent en quelques secondes de tête. Une carte annonce un produit ? Multipliez les deux nombres donnés et comparez. Une carte annonce une somme égale à 1 ? Additionnez.
4. Les deux cartes menteuses portent sur la **définition** et sur la **règle de la somme**. Relisez attentivement ces deux encadrés du cours, puis reprenez la chasse.

Pour faire valider

1. Laissez la page des flashcards **ouverte sur l'écran final**, celui qui affiche les deux cartes menteuses. Pour chacune, sachez dire **en quoi la réponse est fausse** et **quelle est la bonne réponse** : le professeur vous le demandera.
2. Rangez cette fiche.
3. Montrez votre écran au professeur, qui validera l'atelier sur la fiche de suivi.

Objectifs : Calculer des probabilités à partir d'un tableau croisé d'effectifs, puis construire les deux arbres pondérés de la situation.

Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Traitez les six questions dans l'ordre, sur votre cahier, en donnant des fractions irréductibles. Les aides sont sur la page suivante.

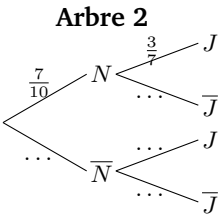
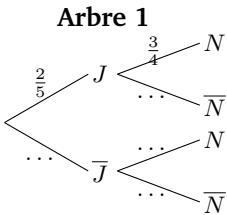
Énoncé

Une médiathèque a noté, pour chacun de ses 150 abonnés, s'il a moins de 18 ans et s'il a emprunté au moins un livre numérique cette année.

	N	$\overline{N}$	Total
J	45	15	60
$\overline{J}$	60	30	90
Total	105	45	150

On choisit un abonné au hasard, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On note J : « l'abonné a moins de 18 ans » et N : « l'abonné a emprunté au moins un livre numérique ».

- 1. Calculer $p(J)$ et $p(N)$.
- 2. Calculer $p(J \cap N)$.
- 3. Calculer $p_J(N)$, puis $p_N(J)$. Interpréter chacun de ces deux résultats par une phrase.
- 4. Reproduire et compléter l'arbre 1 : deux probabilités y sont déjà reportées, mais les six branches doivent toutes en porter une.
- 5. Reproduire et compléter l'arbre 2 de la même façon.
- 6. Sur chaque arbre, vérifier que deux branches issues d'un même nœud ont pour somme 1, puis retrouver $p(J \cap N)$ à l'aide de chacun des deux arbres.



★ AIDES ★

1. Une probabilité se lit ici comme « effectif de l'événement divisé par l'effectif total », c'est-à-dire par 150. Les effectifs cherchés sont dans la colonne « Total » et dans la ligne « Total ». *Valeur de contrôle* : $p(J) = \frac{2}{5}$.
2. L'événement $J \cap N$ est réalisé par les abonnés qui ont à la fois moins de 18 ans et un emprunt numérique : leur effectif occupe une seule case du tableau.
3. Voir la définition et l'exemple 1. Pour $p_J(N)$, on sait déjà que l'abonné a moins de 18 ans : on ne regarde plus que la ligne J , dont le total devient le dénominateur. Pour $p_N(J)$, on ne regarde que la colonne N . *Valeur de contrôle* : $p_J(N) = \frac{3}{4}$.
4. Voir l'exemple 3. Les deux branches du premier niveau portent $p(J)$ et $p(\bar{J})$: la première est déjà reportée, la seconde vient aussi de la question 1. Les quatre branches du second niveau sont des probabilités conditionnelles, lues sur la ligne J pour les deux premières, sur la ligne $\bar{J}$ pour les deux autres. *Valeur de contrôle* : la branche allant de $\bar{J}$ vers N porte $\frac{2}{3}$.
5. Voir l'exemple 4. Même méthode, mais on part cette fois de la colonne N , puis de la colonne $\bar{N}$. *Valeur de contrôle* : la branche allant de $\bar{N}$ vers J porte $\frac{1}{3}$.
6. Voir la règle de la somme et la règle du produit. Pour la somme, additionnez les deux fractions issues d'un même nœud. Pour retrouver $p(J \cap N)$, repérez dans chaque arbre le chemin qui réalise $J \cap N$ et multipliez les probabilités rencontrées le long de ce chemin : les deux arbres n'utilisent pas les mêmes nombres, mais doivent redonner la réponse de la question 2.

Objectifs : Repérer et corriger les erreurs classiques : confusion entre $p_A(B)$, $p_B(A)$ et $p(A \cap B)$, arbre mal pondéré, résultat impossible.
Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Voici quatre extraits de copies rendues par des élèves. Chacun contient une erreur. Vous jouez le rôle du correcteur : repérez l'erreur, expliquez-la, puis écrivez la correction sur votre cahier. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

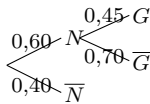
L'énoncé donné aux quatre élèves

Claire joue à un jeu de simulation de tournois de judo. Elle gagne dans 45 % des cas si son adversaire est ceinture noire, et dans 70 % des cas sinon. La probabilité que l'adversaire généré soit ceinture noire est 60 %. On note N : « l'adversaire est ceinture noire » et G : « Claire gagne le combat ». On admet que $p(G) = 0,55$.
1. Donner $p_N(G)$ et $p(N)$. 2. Tracer un arbre pondéré. 3. Calculer $p(N \cap G)$.
4. Sachant que Claire vient de gagner, quelle est la probabilité que l'adversaire ait été ceinture noire ?

Copie 1 — question 1

$p_N(G) = 0,60$ et $p(N) = 0,45$

Copie 2 — question 2 (extrait de l'arbre)



Copie 3 — question 3

$p(N \cap G) = 0,60 + 0,45 = 1,05$

Copie 4 — question 4

$p_G(N) = \frac{p(N \cap G)}{p(N)} = \frac{0,27}{0,60} = 0,45$, soit 45,0 %.

★ AIDES ★

1. **Copie 1** (*voir la définition*) — Relisez la phrase « elle gagne dans 45 % des cas si son adversaire est ceinture noire ». Quel est l'événement qui joue le rôle du « sachant » ? Lequel des deux nombres est donc une probabilité conditionnelle ?
2. **Copie 2** (*voir la règle de la somme*) — Que doit valoir la somme des probabilités des branches partant d'un même nœud ? Vérifiez cette règle sur chaque nœud de l'arbre.
3. **Copie 3** (*voir le théorème*) — Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 : le résultat obtenu est donc impossible. Quelle règle relie $p(N \cap G)$, $p(N)$ et $p_N(G)$: une somme ou un produit ? *Valeur de contrôle* : on doit trouver $p(N \cap G) = 0,27$.
4. **Copie 4** (*voir la définition*) — Dans $p_G(N)$, quel événement est le « sachant » ? C'est donc la probabilité de cet événement qui doit figurer au dénominateur. *Valeur de contrôle* : on doit trouver environ 49,1 %.

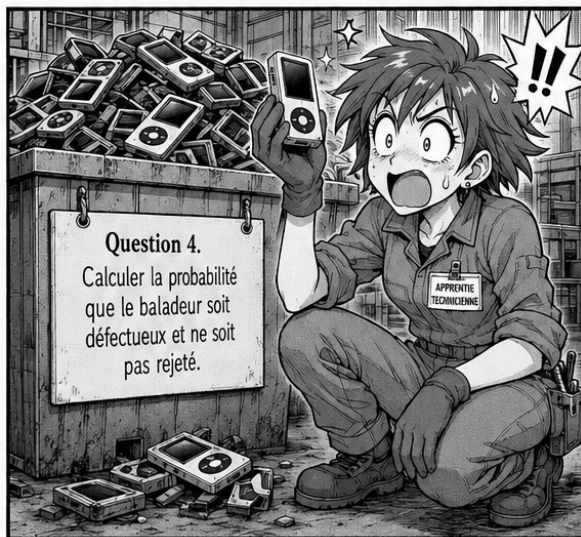
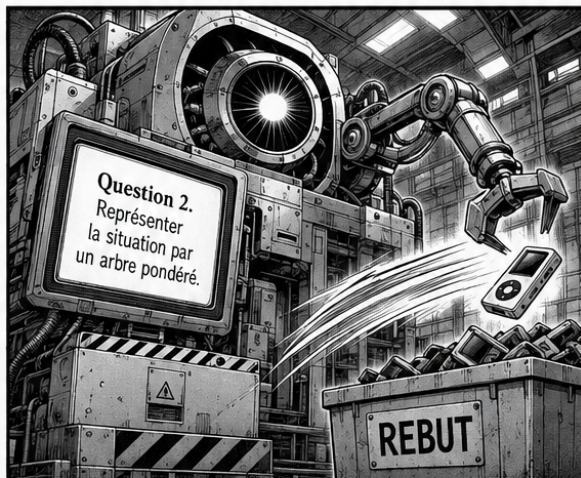
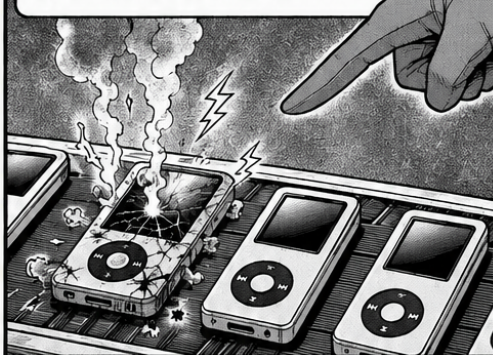
Notre usine fabrique des baladeurs MP3, dont 6 % sont défectueux. Chaque baladeur passe devant l'unité de contrôle. On note D : « le baladeur est défectueux » et R : « l'unité de contrôle rejette le baladeur ».



L'unité rejette 98 % des baladeurs défectueux, et 5 % des baladeurs qui fonctionnent correctement.

Question 1.

Quelle est la probabilité que le baladeur soit rejeté sachant qu'il est défectueux ?



Objectifs : Extraire une probabilité conditionnelle d'un énoncé, construire un arbre pondéré, puis revenir à la définition pour une probabilité qui n'y figure pas.

Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Les données et les cinq questions sont dans les bulles et les cases de la planche ci-contre : lisez-la dans l'ordre, répondez sur votre cahier. Les probabilités sont données sous forme décimale, arrondies si besoin à 10^{-4} . Corrigé à aller chercher une fois le travail terminé.

1. Voir la définition. « L'unité rejette 98 % des baladeurs défectueux » se lit directement comme une probabilité conditionnelle : quel est l'évènement qui joue le rôle du « sachant » ?
2. Voir la règle de la somme. Niveau 1 de l'arbre : D et $\overline{D}$, avec $p(D) = 0,06$. Niveau 2 : R et $\overline{R}$ à partir de chacun des deux nœuds. Valeur de contrôle : sur la branche partant de $\overline{D}$, on doit lire $p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 0,95$.
3. Voir la règle du produit. Traduisez d'abord $\overline{D} \cap R$ par une phrase : que se passe-t-il pour un tel baladeur ? Sa probabilité s'obtient ensuite le long du chemin correspondant.
4. « Défectueux et non rejeté » est aussi une intersection : le chemin passe par D puis $\overline{R}$, avec $p_D(\overline{R}) = 1 - 0,98$.
5. Voir la définition. La probabilité demandée à la question 5 ne figure pas sur l'arbre : $p_R(D) = \frac{p(D \cap R)}{p(R)}$. Valeur de contrôle : $p(D \cap R) = 0,0588$.

Objectifs : Passer de la langue naturelle à l'écriture symbolique puis à la valeur, en distinguant $p(A \cap P)$, $p_A(P)$ et $p_P(A)$.

Matériel : Fiche « Atelier E — cartes » **Durée :** 25 minutes — sans calculatrice

Consignes

Les 12 cartes se répartissent en 4 familles de 3 cartes. Chaque carte porte un code qui sert uniquement de repère : il n'indique pas la famille. Notez vos réponses sur votre cahier. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

La situation

Dans un cinéma, 40 % des spectateurs d'une séance sont abonnés. Parmi les abonnés, 25 % achètent du popcorn ; parmi les spectateurs non abonnés, 60 % en achètent.

On choisit au hasard un spectateur de la séance. On note A l'événement « le spectateur est abonné » et P l'événement « le spectateur achète du popcorn ». On admet que $p(P) = 0,46$.

Travail à réaliser

1. Formez les 4 familles de 3 cartes portant, chacune, une phrase, l'écriture symbolique correspondante et sa valeur.
2. Notez les 4 familles sur votre cahier sous la forme : A... - B... - C...
3. Pour chaque famille, justifiez la valeur par un calcul ou par une lecture de l'énoncé.

★ AIDES ★

1. *Voir la définition.* Repérez d'abord, parmi les quatre phrases, celles qui commencent par « sachant que... » : ce sont les seules qui correspondent à une probabilité conditionnelle. Les deux autres décrivent une intersection.
2. Dans une écriture $p_X(Y)$, l'événement écrit *en indice* est celui que l'on sait déjà réalisé. Comparez soigneusement $p_A(P)$ et $p_P(A)$: ce ne sont pas les mêmes phrases.
3. Une seule des quatre valeurs se lit directement dans l'énoncé, sans aucun calcul. Trouvez-la, elle vous fait gagner une famille.
4. *Voir le théorème.* Pour les intersections, utilisez la règle du produit le long d'un chemin. *Valeur de contrôle* : $p(A \cap P) = 0,1$.
5. Pour la dernière famille, la valeur ne s'obtient pas par un produit : revenez à la définition, avec $p(P) = 0,46$ au dénominateur.

A1 Sachant que le spectateur est abonné, la probabilité qu'il achète du popcorn.	A2 La probabilité que le spectateur ne soit pas abonné et n'achète pas de popcorn.	A3 La probabilité que le spectateur soit un abonné qui achète du popcorn.	A4 Sachant que le spectateur achète du popcorn, la probabilité qu'il soit abonné.
B1 $p_P(A)$	B2 $p(A \cap P)$	B3 $p(\overline{A} \cap \overline{P})$	B4 $p_A(P)$
C1 0,24	C2 0,25	C3 $\frac{5}{23} \approx 0,217$	C4 0,1

Objectifs : Automatiser les trois gestes du chapitre : multiplier le long d'un chemin, diviser pour revenir à la définition, compléter à 1.

Matériel : Fiche « Atelier F — dominos » **Durée :** 25 minutes — sans calculatrice

Consignes

Chaque domino porte, à gauche, une **réponse** et, à droite, une **question**. Reconstituez la chaîne en plaçant après chaque domino celui dont la partie gauche donne la réponse à sa question. La chaîne se referme sur elle-même : le dernier domino répond à la question du premier, ce qui valide l'ensemble. Notez l'ordre obtenu sur votre cahier. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

Notations

Dans tous les dominos, A et B désignent deux événements d'une même expérience aléatoire, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Aucun contexte particulier ne leur est associé : seuls les calculs comptent.

★ AIDES ★

1. *Voir la règle de la somme.* Commencez par les questions les plus rapides : celles qui ne demandent qu'un passage au contraire, $p(A) + p(\overline{A}) = 1$ ou $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$.
2. *Voir le théorème.* Quand le domino donne $p(A)$ et $p_A(B)$, il s'agit d'un chemin : on *multiplie*. Quand il donne $p(A \cap B)$ et $p(A)$, on remonte à la définition : on *divise*.
3. Attention à l'indice : $p_B(A)$ se calcule avec $p(B)$ au dénominateur, et non $p(A)$.
4. Si la chaîne se bloque, vérifiez la question dont la réponse est 0,5 : c'est la seule division dont le dénominateur est $p(B)$. *Valeur de contrôle* : les douze réponses sont toutes différentes, et l'une d'elles vaut 0,04.

0,3	D1 $p(A) = 0,25$. Calculer $p(\overline{A})$.	0,54	D2 $p(A) = 0,3$ et $p_A(B) = 0,3$. Calculer $p(A \cap B)$.	0,2	D3 $p(A) = 0,2$ et $p_A(B) = 0,5$. Calculer $p(A \cap B)$.	0,55	D4 $p(A) = 0,8$ et $p_A(B) = 0,05$. Calculer $p(A \cap B)$.
0,65	D5 $p(A) = 0,5$ et $p_A(B) = 0,4$. Calculer $p(A \cap B)$.	0,6	D6 $p_A(B) = 0,45$. Calculer $p_A(\overline{B})$.	0,09	D7 $p(\overline{A}) = 0,35$. Calculer $p(A)$.	0,7	D8 $p(A \cap B) = 0,12$ et $p(A) = 0,4$. Calculer $p_A(B)$.
0,04	D9 $p(A \cap B) = 0,35$ et $p(B) = 0,7$. Calculer $p_B(A)$.	0,1	D10 $p_A(B) = 0,3$. Calculer $p_A(\overline{B})$.	0,5	D11 $p(A) = 0,6$ et $p_A(B) = 0,9$. Calculer $p(A \cap B)$.	0,75	D12 $p(A \cap B) = 0,06$ et $p(A) = 0,1$. Calculer $p_A(B)$.

Objectifs : Faire le point sur le chapitre et repérer ce qui reste à retravailler.
Matériel : Un ordinateur ou un téléphone **Durée** : 20 minutes — sans calculatrice

Consignes

Ouvrir le QCM sur **MathaCoeur** : **10 questions**, toutes indépendantes.
Objectif : **9 bonnes réponses au moins**.

Pour chaque question, cherchez la réponse *sur votre cahier* avant de cliquer.

Une fois la réponse choisie, elle est verrouillée : on ne peut plus la modifier. Prenez donc le temps de réfléchir.

La correction s'affiche immédiatement, accompagnée d'une explication : lisez-la même quand vous avez juste, elle donne souvent la rédaction attendue.

Le bouton « **Recommencer** » relance un questionnaire neuf : les valeurs numériques changent à chaque fois, et pour certaines questions la réponse attendue change aussi.

Le cours reste à votre disposition

Cet atelier n'est pas un contrôle et n'est pas noté : **consultez votre cours aussi souvent que vous le souhaitez**.

Notez sur votre cahier le numéro des questions manquées, puis relisez le passage du cours correspondant. Trois points reviennent : la **traduction** d'un énoncé en $p_A(B)$ ou $p(A \cap B)$ (*définition*), la **règle du produit** le long d'un chemin (*théorème*), et le retour à la **définition** quand la probabilité cherchée ne figure pas sur l'arbre.

Pour faire valider

1. Laissez la page du QCM **ouverte** lorsque vous aurez obtenu au moins **9 sur 10**.
2. Rangez la fiche de consignes.
3. Montrez votre résultat au professeur, qui validera l'atelier sur la fiche de suivi.

Objectifs : Traiter un exercice au format de l'épreuve anticipée : compléter un arbre, appliquer la règle du produit, conclure par une fraction irréductible.

Durée : 20 minutes — sans calculatrice

Consignes

Traitez les quatre questions dans l'ordre, sur votre cahier, en rédigeant comme le jour de l'épreuve : une phrase de conclusion à chaque question. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

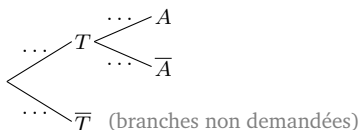
Énoncé

Un loueur propose des bicyclettes traditionnelles et des bicyclettes électriques, et incite ses clients à prendre une assurance. On dispose des informations suivantes :

- 60 % des clients ont loué une bicyclette traditionnelle, les autres une bicyclette électrique ;
- parmi ceux qui ont loué une bicyclette traditionnelle, 25 % ont pris une assurance ;
- 20 % de l'ensemble des clients ont pris une assurance.

On choisit un client au hasard. On note T : « le client a loué une bicyclette traditionnelle » et A : « le client a pris une assurance ».

1. Reproduire et compléter les quatre pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Donner, par simple lecture de l'énoncé, la probabilité de l'événement A .
3. Montrer que la probabilité que le client ait loué une bicyclette traditionnelle et pris une assurance est égale à 0,15.
4. Déterminer la probabilité que le client ait loué une bicyclette traditionnelle sachant qu'il a pris une assurance. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

★ AIDES ★

1. *Voir la règle de la somme.* Deux probabilités seulement se lisent directement dans l'énoncé : $p(T) = 0,60$ et $p_T(A) = 0,25$. Les deux autres branches s'en déduisent. Valeurs de contrôle : $p(\overline{T}) = 0,40$ et $p_T(\overline{A}) = 0,75$.
2. « 20 % de l'**ensemble** des clients » ne comporte aucun « sachant » : ce n'est donc pas une probabilité conditionnelle.
3. *Voir le théorème.* « Traditionnelle **et** assurance » est une intersection : $p(T \cap A) = p(T) \times p_T(A)$.
4. *Voir la définition.* À la question 4, l'événement connu est A : c'est donc $p(A)$ qui figure au dénominateur. Cette probabilité ne se lit pas sur l'arbre construit à la question 1.
5. Pour simplifier $\frac{0,15}{0,20}$, multipliez numérateur et dénominateur par 100 avant de réduire.

Lectures dans le tableau

1. $p(J) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$ et $p(N) = \frac{105}{150} = \frac{7}{10}$.

2. L'événement $J \cap N$ est réalisé par les 45 abonnés de la case commune à la ligne J et à la colonne N : $p(J \cap N) = \frac{45}{150} = \frac{3}{10}$.

3. On se restreint à la ligne J , d'effectif total 60 : $p_J(N) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

Parmi les abonnés de moins de 18 ans, trois sur quatre ont emprunté au moins un livre numérique.

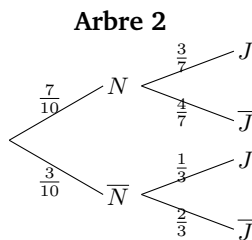
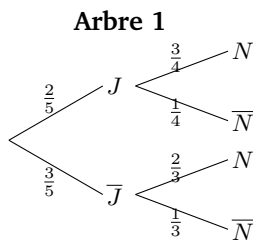
On se restreint à la colonne N , d'effectif total 105 : $p_N(J) = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$.

Parmi les abonnés ayant emprunté au moins un livre numérique, trois sur sept ont moins de 18 ans.

Ces deux probabilités sont différentes : $p_J(N)$ et $p_N(J)$ ne se confondent pas.

Les deux arbres

4. et 5. Les probabilités du premier niveau viennent de la question 1 ; celles du second niveau se lisent ligne par ligne pour l'arbre 1, colonne par colonne pour l'arbre 2.



6. Somme. Arbre 1 : $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Arbre 2 : $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$, $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{7}{7} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Produit. Arbre 1 : $p(J \cap N) = p(J) \times p_J(N) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Arbre 2 : $p(J \cap N) = p(N) \times p_N(J) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{7} = \frac{21}{70} = \frac{3}{10}$.

Les deux chemins n'utilisent pas les mêmes nombres, mais donnent bien la réponse de la question 2.

Les quatre copies

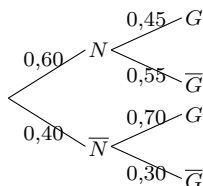
Copie 1 — les deux données ont été échangées.

« Elle gagne dans 45 % des cas si son adversaire est ceinture noire » se traduit par une probabilité *conditionnelle* : on se place sachant N . La valeur 60 %, elle, concerne l'adversaire généré, sans condition.

$$p_N(G) = 0,45 \quad \text{et} \quad p(N) = 0,60$$

Copie 2 — la règle de la somme n'est pas respectée.

Au nœud N , les branches portent 0,45 et 0,70, dont la somme vaut $1,15 \neq 1$. La valeur 0,70 est celle de $p_{\bar{N}}(G)$: elle part du nœud $\bar{N}$, pas du nœud N .



Copie 3 — une somme a été utilisée à la place d'un produit.

Le résultat 1,05 est impossible : une probabilité appartient à $[0; 1]$. C'est la règle du produit qui s'applique le long d'un chemin :

$$p(N \cap G) = p(N) \times p_N(G) = 0,60 \times 0,45 = 0,27$$

Copie 4 — le dénominateur n'est pas le bon.

Dans $p_G(N)$, l'événement « sachant » est G : c'est donc $p(G)$ qui figure au dénominateur.

$$p_G(N) = \frac{p(N \cap G)}{p(G)} = \frac{0,27}{0,55} \approx 0,4909$$

Sachant que Claire a gagné, la probabilité que son adversaire ait été ceinture noire est d'environ 49,1 %.

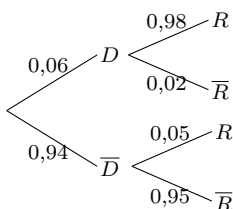
$p_N(G) = 0,45$ et $p_G(N) \approx 0,491$ sont bien deux nombres différents.

Pour faire valider

1. Rangez le matériel de l'atelier : la fiche de consignes et ce corrigé.
2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.

Corrigé

1. L'unité rejette 98 % des baladeurs défectueux, c'est-à-dire $p_D(R) = 0,98$.
2. $p(D) = 0,06$ donc $p(\overline{D}) = 0,94$; $p_D(\overline{R}) = 1 - 0,98 = 0,02$; $p_{\overline{D}}(R) = 0,05$ donc $p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 0,95$.



3. $\overline{D} \cap R$: « le baladeur fonctionne correctement et l'unité le rejette quand même ». C'est un rejet à tort. Par la règle du produit :

$$p(\overline{D} \cap R) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,94 \times 0,05 = 0,047$$

4. « Défectueux et non rejeté » se traduit par $D \cap \overline{R}$:

$$p(D \cap \overline{R}) = p(D) \times p_D(\overline{R}) = 0,06 \times 0,02 = 0,0012$$

Ce baladeur défectueux part malgré tout à la vente : c'est l'erreur inverse de celle de la question 3.

5. Cette probabilité ne figure pas sur l'arbre. Or $p(D \cap R) = 0,06 \times 0,98 = 0,0588$, donc

$$p_R(D) = \frac{p(D \cap R)}{p(R)} = \frac{0,0588}{0,1058} \approx 0,5558$$

Sachant qu'un baladeur a été rejeté, la probabilité qu'il soit réellement défectueux n'est que d'environ 55,6 % : près d'un baladeur rejeté sur deux fonctionnait correctement.

Pour faire valider

1. Rangez le matériel de l'atelier : la planche, la fiche de consignes et ce corrigé.
2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.

Les 4 familles

Phrase	Écriture	Valeur	Justification
A3	B2	C4	$p(A) \times p_A(P) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$
A1	B4	C2	lecture directe de l'énoncé : 0,25
A4	B1	C3	$\frac{p(A \cap P)}{p(P)} = \frac{0,1}{0,46} = \frac{5}{23}$
A2	B3	C1	$p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(\overline{P}) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

Détail des calculs

A3–B2–C4. « Un abonné qui achète du popcorn » est une intersection : le chemin passe par A puis P . Règle du produit : $0,4 \times 0,25 = 0,1$.

A1–B4–C2. « Parmi les abonnés, 25 % achètent du popcorn » est exactement $p_A(P) = 0,25$: aucun calcul n'est nécessaire.

A4–B1–C3. Ici l'événement connu est P : c'est donc $p(P)$ qui figure au dénominateur.

$$p_P(A) = \frac{p(A \cap P)}{p(P)} = \frac{0,1}{0,46} = \frac{10}{46} = \frac{5}{23} \approx 0,217$$

À comparer avec la famille précédente : $p_A(P) = 0,25$ et $p_P(A) \approx 0,217$ sont deux nombres différents.

A2–B3–C1. $p(\overline{A}) = 0,6$ et, parmi les non-abonnés, 60 % achètent du popcorn, donc $p_{\overline{A}}(\overline{P}) = 1 - 0,6 = 0,4$. D'où $0,6 \times 0,4 = 0,24$.

Pour faire valider

1. Rangez le matériel de l'atelier : la fiche de consignes, ce corrigé et le jeu de 12 cartes (comptez-les).

2. Présentez votre fiche de suivi au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.

La chaîne, qui se referme sur elle-même

Rang	Code	Réponse portée	Question du domino	Réponse
1	D5	0,65	$p(A) = 0,5$ et $p_A(B) = 0,4 : p(A \cap B)$	0,2
2	D3	0,2	$p(A) = 0,2$ et $p_A(B) = 0,5 : p(A \cap B)$	0,1
3	D10	0,1	$p_A(B) = 0,3 : p_A(\overline{B})$	0,7
4	D8	0,7	$p(A \cap B) = 0,12$ et $p(A) = 0,4 : p_A(B)$	0,3
5	D1	0,3	$p(A) = 0,25 : p(\overline{A})$	0,75
6	D12	0,75	$p(A \cap B) = 0,06$ et $p(A) = 0,1 : p_A(B)$	0,6
7	D6	0,6	$p_A(B) = 0,45 : p_A(\overline{B})$	0,55
8	D4	0,55	$p(A) = 0,8$ et $p_A(B) = 0,05 : p(A \cap B)$	0,04
9	D9	0,04	$p(A \cap B) = 0,35$ et $p(B) = 0,7 : p_B(A)$	0,5
10	D11	0,5	$p(A) = 0,6$ et $p_A(B) = 0,9 : p(A \cap B)$	0,54
11	D2	0,54	$p(A) = 0,3$ et $p_A(B) = 0,3 : p(A \cap B)$	0,09
12	D7	0,09	$p(\overline{A}) = 0,35 : p(A)$	0,65

Les trois gestes de calcul

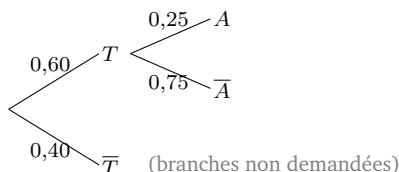
- **Un produit** quand on descend un chemin : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ (dominos D5, D3, D4, D11, D2).
- **Une division** quand on remonte à la définition : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, et $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (D8, D12, D9). C'est l'indice qui indique le dénominateur.
- **Un complément à 1** pour passer au contraire (D10, D1, D6, D7).

Pour faire valider

1. Rangez le matériel de l'atelier : la fiche de consignes, ce corrigé et le jeu de 12 dominos (comptez-les).
2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.

Corrigé

1. L'énoncé donne $p(T) = 0,60$ et $p_T(A) = 0,25$. La règle de la somme fournit $p(\bar{T}) = 1 - 0,60 = 0,40$ et $p_T(\bar{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$.



2. L'énoncé indique que 20 % de l'ensemble des clients ont pris une assurance, sans aucune condition : $p(A) = 0,20$.

3. « Traditionnelle et assurance » est une intersection. D'après le théorème :

$$p(T \cap A) = p(T) \times p_T(A) = 0,60 \times 0,25 = 0,15$$

La probabilité que le client ait loué une bicyclette traditionnelle et pris une assurance est 0,15.

4. L'événement connu est ici A : c'est donc $p(A)$ qui figure au dénominateur. Cette probabilité ne se lit pas sur l'arbre, on revient à la définition :

$$p_A(T) = \frac{p(T \cap A)}{p(A)} = \frac{0,15}{0,20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Sachant que le client a pris une assurance, la probabilité qu'il ait loué une bicyclette traditionnelle est $\frac{3}{4}$, soit 75 % : les clients assurés sont majoritairement des clients de bicyclettes traditionnelles.

$p_T(A) = 0,25$ et $p_A(T) = 0,75$ sont deux nombres différents, alors que les deux écritures se ressemblent.

Pour faire valider

1. Rangez le matériel de l'atelier : la fiche de consignes et ce corrigé.

2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.