LES SUITES

Modes de génération et sens de variation

Première spécialité mathématiques — chapitre 103

Comment travailler. On choisit un atelier, on le fait sur son cahier, on va chercher le corrigé, on se corrige soi-même, puis on demande la validation du professeur.

Comment naviguer. Cliquez sur les pastilles : les **bleues** restent dans ce document, les **dorées** ouvrent un fichier en ligne. Pour revenir à ce menu, cliquez sur le bandeau de titre en haut de la page où vous vous trouvez.

Le cours

Le cours complet distribué en classe : les deux définitions, les cinq exemples et tous les commentaires.

Ouvrir le cours

La vérification

QCM en deux parties : les définitions, puis les exemples du cours. Ni noté, ni chronométré.

Ouvrir le QCM de vérification

Les ateliers

Réalisables dans l'ordre de votre choix. Capacités attendues : 1 h 35.

	Intitulé	Type	Durée	Documents
A	Flashcards menteuses	Conso.	15 min	Règle du jeu · Flashcards en ligne
B	Suites définies par un motif	Cap. att.	30 min	Consignes · Corrigé
C	Conjecturer, puis démontrer	Cap. att.	35 min	Consignes · Cartes · Corrigé
D	Plier une feuille jusqu'à la Lune	Approf.	25 min	Consignes · Parcours en ligne
E	Modéliser une situation	Cap. att.	30 min	Consignes · Corrigé
F	Le refroidissement du four	Conso.	30 min	Planche · Consignes · Corrigé
G	Auto-évaluation	Conso.	20 min	Consignes · QCM en ligne
H	La chasse aux erreurs	Conso.	25 min	Consignes · Corrigé

Cap. att. : les capacités attendues sont les incontournables du chapitre.
Conso. : la consolidation entraîne sur ce qui vient d'être vu, pour l'ancrer.
Approf. : l'approfondissement va plus loin que les incontournables.

Les suites : modes de génération et sens de variation

Cours

« Je pense que ce qui compte, ce n'est pas tant ce que l'on apprend réellement en classe, mais plutôt ce qui nous motive à continuer à faire les choses par nous-mêmes. »

Maryam Mirzakhani

Tout commence par un simple jeu : trouver la suite. Par exemple : $0-1-4-9-\ldots$ Ou encore : $1-2-4-7-\ldots$ Ces suites sont définies par une certaine logique qu'il faut trouver, c'est en cela que réside le jeu.

Et puis voilà que quelqu'un sort du jeu et se demande : mais c'est quoi en fait une suite ? Ce sont des nombres qui se suivent, autrement dit un ensemble de nombres. Mais c'est pas assez précis. Les nombres se suivent, donc ils ont un ordre, c'est un ensemble ordonné de nombres. C'est mieux, mais il manque une idée : ça ne s'arrête pas. C'est donc un ensemble infini et ordonné de nombres. N'importe quels nombres ? A priori oui, pas de restriction : **une suite est un ensemble infini et ordonné de nombres réels**. C'est pas mal ça. On a dépassé largement le cadre du jeu. On voit naître un nouvel objet mathématique. Son nom est « suite », « **suite de nombres réels** » pour être précis.

La réflexion sur ce nouvel objet se poursuit : ordonné, ça veut dire quoi exactement ? Qu'il y a un premier, puis un deuxième, puis... Ok, on a compris. On peut leur donner un numéro en gros. Ah mais oui, il faudrait pouvoir les numéroter ces nombres, pour s'y retrouver.

Résumons le vocabulaire et les notations à inventer pour aller avec notre nouvel objet : il faudrait une notation pour l'objet lui-même, la suite (son nom, on l'a déjà) ; il faudrait un nom et une notation pour les éléments de la suite, les nombres ; et il faudrait en même temps une astuce pour que ces nombres soient numérotés, qu'on sache quel est le premier, quel le deuxième, quel est le huitième, etc.

I. Calculer les termes d'une suite

A. Définir une suite

La **suite** elle-même peut être notée par une lettre comme u. On peut utiliser n'importe quelle lettre pour désigner une suite : u, v, w, a, b...

Les valeurs de la suite sont appelées ses **termes** et le numéro d'un terme est appelé son **rang**. On commence la plupart du temps à 0 ou à 1. Chaque terme d'une suite u peut alors être noté u_n (notation du rang en indice) ou bien $u(n)$ (notation à la façon des fonctions).

Pour la suite des carrés parfaits, on peut numéroter à partir de 0 :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 4, \quad \ldots$$

et de façon générale, pour tout entier naturel n :

$$u_n = n^2$$

Si on avait numéroté à partir de 1, cela aurait donné : $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$ et de façon générale $u_n = (n-1)^2$, bien moins naturel et pratique.

En résumé :

Numérotation (rang)	0	1	2	3	...	n	...
Suite u	$u_0 = 0$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 9$	...	$u_n = n^2$	...

Pour la suite $1-2-4-7-11-\ldots$, on peut commencer par noter $u_1 = 1$ puis on a :

$$u_2 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$u_3 = u_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$
$$u_4 = u_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$
$$\vdots$$

et on poursuit avec la règle de calcul suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n + n$$

Cette règle peut aussi être écrite ainsi $u_n = u_{n-1} + (n-1)$, pour $n \geqslant 2$, mais la précédente est un peu plus simple à utiliser.

En résumé :

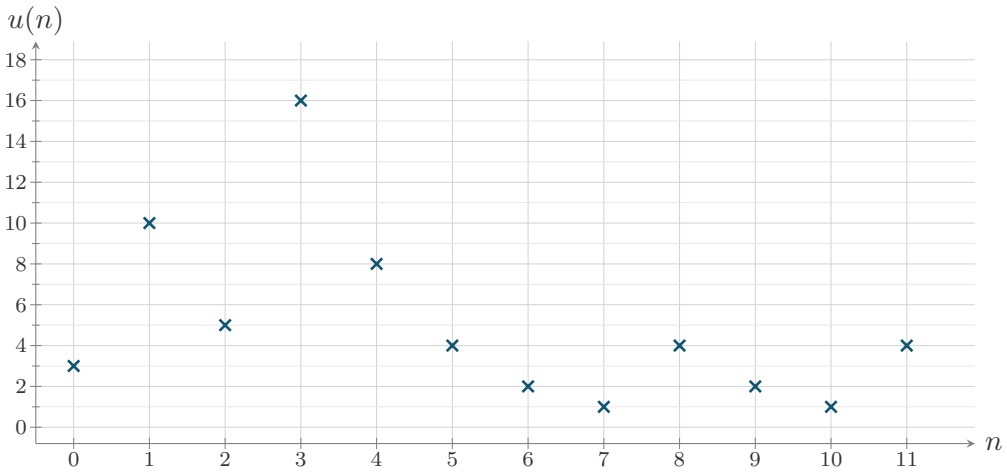
Numérotation (rang)	1	2	3	4	…	n	$n+1$	…
Suite u	$u_1 = 1$	$u_2 = 2$	$u_3 = 4$	$u_4 = 7$	…	u_n	$u_{n+1} = u_n + n$	…

Mathématiquement, une suite est ainsi tout simplement une fonction qui, à tout entier naturel n, associe un nombre réel.

Définition 1. Une **suite** est une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou à partir d'un certain entier).

B. Voir une petite suite c'est agréaAAble

On peut compléter notre découverte des suites avec une vision plus globale grâce à une représentation graphique : une suite étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, elle peut être **représentée** par un « nuage de points » (un ensemble de points) avec en abscisse le rang n et en ordonnée le terme de la suite de rang n.
Par exemple :



Représentation graphique de la suite de Syracuse commençant par 3.

C. D'un coup ou l'un après l'autre

Jusqu'ici, nous avons donc mis en évidence deux façons de définir précisément une suite :

- **par une formule explicite (ou terme général) : u_n en fonction de n directement**
  Chaque terme étant exprimé en fonction de n, on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement.

Exemple 1. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 1$. Calculer u_2.

Solution. Le terme général donné permet de calculer n'importe quel terme directement :

$$\begin{aligned} u_2 &= 3 \times 2 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

En conclusion : $u_2 = 5$.

- **par une relation de récurrence : u_{n+1} en fonction de u_n**
  Chaque terme étant exprimé en fonction du précédent, pour calculer un terme, il faut avoir calculé les précédents.

Exemple 2. La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 3v_n - 1$. Calculer v_2.

Solution. D'après la relation de récurrence, v_0 permet de calculer v_1 et v_1 permet de calculer v_2 donc il faut d'abord calculer v_1 pour pouvoir ensuite calculer v_2 :

$$\begin{aligned} v_1 &= 3v_0 - 1 \\ &= 3 \times 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Calculons maintenant v_2 :

$$\begin{aligned} v_2 &= 3v_1 - 1 \\ &= 3 \times (-1) - 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

En conclusion : $v_2 = -4$.

On pourra rencontrer à l'occasion deux autres façons de définir une suite : **par un algorithme ou un programme**, et **par des motifs géométriques**. Mais ces deux façons s'apparentent en réalité la plupart du temps à une définition par une relation de récurrence ou par un terme général.

II. Sur le sens de variations des suites

Une fonction peut être croissante sur un intervalle puis décroissante sur un autre. C'est plus simple avec les suites. Elles sont soit croissantes (sous-entendu de partout), soit décroissantes (sous-entendu de partout), soit ni l'un ni l'autre. Une suite est croissante si chaque terme est supérieur ou égal au précédent, décroissante si chaque terme est inférieur ou égal au précédent. On peut préciser un cas particulier : une suite est constante si tous ses termes sont identiques. On introduit alors la notion de monotonie pour indiquer qu'une suite est soit croissante, soit décroissante : celle-ci n'ayant pas de changement de variations, on dit qu'elle est monotone et on pourra apprécier la sensibilité de celui qui est à l'origine du choix du vocabulaire.

Définition 2. Soit u une suite.

La suite u est **croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est **strictement croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

La suite u est **décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite u est **strictement décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

La suite u est **constante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite **monotone** est une suite croissante ou une suite décroissante. Une suite **strictement monotone** est une suite strictement croissante ou une suite strictement décroissante.

Il y a donc, concernant les variations, uniquement trois types de suites :

- les suites croissantes ;
- les suites décroissantes ;
- et les suites qui ne sont pas monotones (elles ne sont ni croissantes, ni décroissantes).

Si une suite admet comme termes consécutifs 10 puis 5, on en déduit que cette suite n'est pas croissante (mais elle peut être décroissante ou ne pas être monotone). De la même façon, si 2 et 7 sont deux termes consécutifs d'une suite, on peut en déduire qu'elle n'est pas décroissante.

En résumé, pour démontrer qu'une suite n'est pas croissante, ou qu'elle n'est pas décroissante, on peut utiliser deux termes consécutifs bien choisis.

Exemple 3. Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 3$.

Solution. Calculons les premiers termes de la suite u :

$$u_0 = 0^2 - 4 \times 0 + 3 = 3$$
$$u_1 = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$$

donc $u_1 < u_0$ et la suite n'est pas croissante.

$$u_2 = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$$
$$u_3 = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$$

donc $u_3 > u_2$ et la suite n'est pas décroissante.

En conclusion, la suite u n'est pas monotone.

Attention toutefois : connaître seulement les premiers termes d'une suite ne permet pas de conclure qu'elle est monotone. Par exemple, si l'on connaît uniquement les termes $u_0 = 10$, $u_1 = 7$ et $u_2 = 3$, on peut penser que la suite est décroissante. Pourtant, il est tout à fait possible que le terme suivant soit supérieur à 3 : dans ce cas, la suite ne serait plus décroissante et ne serait donc pas monotone. Avec ces seules informations, la seule conclusion certaine est que la suite n'est pas croissante.

Pour démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante, il ne suffit donc pas d'observer ses premiers termes. Il faut prouver que **tous** les termes de la suite, en nombre infini, sont ordonnés dans le même sens. C'est pourquoi on utilise le calcul littéral : il permet de comparer, pour tout entier n, le terme u_n au terme suivant u_{n+1}, et ainsi d'établir avec certitude la monotonie de la suite.

En résumé, pour démontrer qu'une suite est croissante ou qu'elle est décroissante, on doit utiliser le calcul littéral et on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes :

- **comparer directement** u_{n+1} **et** u_n (voir les définitions) ;
- **étudier le signe de** $u_{n+1} - u_n$ ($u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$ et $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$).

Exemple 4. Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3 + 5n$.

Solution. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(-3 + 5(n+1)\big) - (-3 + 5n) \\ &= (5n + 2) + 3 - 5n \\ &= 5 > 0 \end{aligned}$$

donc

$$u_{n+1} > u_n$$

et ainsi

la suite u est strictement croissante.

- **si** $u_n > 0$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, comparer le rapport** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ **et 1** (si $u_n > 0$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \iff u_{n+1} < u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} > u_n$).

Exemple 5. Étudier le sens de variation de la suite strictement positive u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n \times 0{,}8$.

Solution. La suite étant strictement positive, on peut calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}8 < 1$$

donc

$$u_{n+1} < u_n \quad \text{(car } u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\text{)}$$

et ainsi

la suite u est strictement décroissante.

ATELIER A

Flashcards menteuses

Objectifs : Mémoriser le vocabulaire et les méthodes du chapitre, et débusquer les deux cartes qui mentent.
Matériel : un ordinateur ou un téléphone, site **MathaCoeur**. **Durée :** 15 minutes

La règle du jeu

Douze cartes défilent une à une, dans un ordre à chaque fois différent. La question est au recto, la réponse au verso : on retourne la carte autant de fois qu'on veut, dans les deux sens.

Deux de ces douze cartes portent une réponse fausse. À vous de les démasquer.

Trois boutons

1. **Juste** — la réponse est correcte : la carte ne revient plus.
2. **J'hésite** — la carte repart en fin de liste et reviendra plus tard.
3. **Carte menteuse !** — vous accusez cette carte. Deux emplacements au plus ; un clic suffit à retirer une accusation.

La partie s'arrête quand la pile est vide *et* que deux cartes sont désignées. L'écran vous dira alors combien de vos deux accusations sont justes : s'il en manque, la chasse est à refaire.

Pour faire valider

1. Laissez la page des flashcards **ouverte sur l'écran final**, celui qui annonce les deux cartes démasquées. Pour chacune, sachez dire **en quoi la réponse est fausse** et **quelle est la bonne réponse** : le professeur vous le demandera.
2. Montrez votre écran au professeur, qui validera l'atelier sur la fiche de suivi.
3. Une fois l'atelier validé, rangez cette fiche.

★ AIDES ★

1. Le cours reste à votre disposition : ce n'est pas un contrôle. Chaque carte porte un renvoi discret vers la définition ou l'exemple concerné.

2. L'une des deux cartes fausses se trahit toute seule : une **autre carte du jeu la contredit**. Comparez entre elles les cartes qui parlent du même sujet.

3. L'autre est plus discrète : l'énoncé de la réponse est juste, c'est **un seul élément de l'exemple** qui cloche. Relisez les exemples jusqu'au bout.

4. Un doute sur une carte « méthode » ? Vérifiez que les conditions d'emploi sont respectées, et testez l'exemple donné en calculant vous-même les premiers termes.

5. Toujours bloqué ? Les deux cartes menteuses sont f dix et f douze. Il reste à trouver en quoi elles mentent, et la bonne réponse.

ATELIER B

Suites définies par un motif

Objectifs : Déterminer une relation de récurrence et une formule explicite à partir d'un motif géométrique.
Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Observez les trois premiers motifs, puis répondez aux questions sur votre cahier. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

Énoncé

Le premier motif est composé d'une rangée de deux billes, le deuxième de deux rangées de trois billes, le troisième de trois rangées de quatre billes, etc.
On note u_n le nombre de billes du motif n, pour n entier naturel non nul : $u_1 = 2$, $u_2 = 6$ et $u_3 = 12$.



motif 1 ($u_1 = 2$) motif 2 ($u_2 = 6$) motif 3 ($u_3 = 12$)

1. Calculer u_4 et u_5 (dessiner au brouillon si besoin).

2. Calculer u_6 et u_7, sans dessin.

3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, dire parmi les expressions suivantes de u_{n+1} en fonction de u_n lesquelles semblent correctes.

$$u_{n+1} = u_n + 2(n+1) \quad u_{n+1} = u_n + (n+2) \quad u_{n+1} = u_n + n \quad u_{n+1} = u_n + 2n$$

4. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, dire parmi les expressions suivantes de u_n en fonction de n lesquelles semblent correctes.

$$u_n = n^2 + n + 1 \quad u_n = 2n^2 \quad u_n = n(n+1) \quad u_n = n(n-1)$$

★ AIDES ★

1. Combien y a-t-il de rangées dans le motif n ? Combien de billes par rangée ? Comptez précisément sur les dessins des motifs 1, 2 et 3.

2. Le motif n est composé de n rangées de $(n+1)$ billes. Utilisez cette description pour imaginer le motif 4, puis le motif 5. *Valeur de contrôle* : $u_4 = 20$.

3. Testez chaque expression avec $n = 1$, puis avec $n = 2\ldots$ pour éliminer celles qui sont fausses.

Pour aller plus loin : pour passer du motif n au motif $n+1$, on ajoute $n+1$ billes en haut, puis $n+1$ billes à droite. Ci-dessous, le passage du motif 3 au motif 4 :



Combien de rangées de combien de billes obtient-on après l'ajout du haut ? Combien de billes a-t-on ajoutées en tout ?

4. **Question 4** — Remplacez n par une petite valeur (par exemple $n = 2$) dans chaque proposition et comparez avec $u_2 = 6$: cela élimine des expressions sans tout démontrer.

ATELIER C

Conjecturer, puis démontrer

Objectifs : Distinguer une conjecture d'une démonstration et choisir la méthode adaptée à chaque suite.
Matériel : le jeu de 12 cartes. **Durée :** 35 minutes — sans calculatrice

Consignes

Traitez la partie 1 sur votre cahier, puis la partie 2 avec le jeu de cartes. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

Partie 1 — Exercices

Exercice 1. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 3$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Que peut-on dire du sens de variation de u ? Est-ce démontré ?

Exercice 2. La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = -10$ et $v_{n+1} = v_n + 2$.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Que peut-on dire du sens de variation de v ? Est-ce démontré ?
3. Démontrer que v est strictement croissante en étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$.

Partie 2 — Quelle méthode ?

Formez les quatre familles de trois cartes : une suite, ses premiers termes, et la conclusion ou la méthode qui lui correspond. Le code porté par chaque carte n'est qu'un repère : il ne révèle pas l'association.

★ AIDES ★

1. Exercice 1 *(voir la définition 2)* — $u_1 < u_0$: qu'en conclure sur la croissance ? $u_2 > u_1$: qu'en conclure sur la décroissance ? Un contre-exemple bien choisi suffit-il ?

2. Exercice 2 — La relation $v_{n+1} = v_n + 2$ donne chaque terme à partir du précédent. *Valeurs de contrôle* : $u_2 = 3$ (exercice 1) et $v_2 = -6$. Observer que les premiers termes augmentent ne suffit pas : rien ne garantit que cela continue pour *tous* les rangs.

3. Exercice 2, question 3 *(voir l'exemple 4)* — Calculez littéralement $v_{n+1} - v_n$ en remplaçant v_{n+1} par $v_n + 2$. Le résultat dépend-il encore de n ?

4. Partie 2 *(voir l'exemple 5)* — Calculez d'abord deux ou trois termes de chaque suite. La méthode du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne s'utilise que si la suite est strictement positive pour tout n. Deux familles pour démarrer : suite un, termes quatre, méthode trois ; suite deux, termes un, méthode quatre.

A1

u définie sur $\mathbb{N}$ par
$u_n = n^2 - 2n + 3$

A2

u définie sur $\mathbb{N}$ par
$u_0 = -10$ et $u_{n+1} = u_n + 2$

A3

u définie sur $\mathbb{N}$ par
$u_n = 5 - 3n$

A4

u **strictement positive**, définie par
$u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n$

B1

$u_0 = -10$; $u_1 = -8$; $u_2 = -6$

B2

$u_0 = 5$; $u_1 = 2$; $u_2 = -1$

B3

$u_0 = 10$; $u_1 = 8$; $u_2 = 6{,}4$

B4

$u_0 = 3$; $u_1 = 2$; $u_2 = 3$

C1

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: la suite est **décroissante**.

C2

On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 : la suite est **décroissante**.

C3

Deux termes suffisent : la suite **n'est pas monotone**.

C4

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: la suite est **croissante**.

ATELIER D

Plier une feuille jusqu'à la Lune

Objectifs : Chercher un seuil à la main, puis avec un programme Python validé sur un cas connu.
Matériel : Un ordinateur **Durée :** 25 minutes — sans calculatrice

Consignes

Ouvrir le parcours guidé sur **MathaCoeur** :
`https://mathacoeur.com/documents/103-D.php`

Huit écrans, à lire dans l'ordre. Ils posent **7 questions** : cherchez la réponse sur votre cahier avant de cliquer, car **la première réponse choisie est verrouillée**. Objectif : **6 bonnes réponses sur 7**.

Sur votre cahier, notez la relation de récurrence, les termes jusqu'à u_{14} et le nombre de pliages trouvé pour votre objectif.

L'écran 6 propose une console Python : le programme est déjà écrit, il suffit de l'exécuter, puis de changer un nombre. Si elle ne se charge pas, utilisez `https://sciency.co/console`.

Pour faire valider

1. Laissez le parcours ouvert sur l'**écran final**, celui qui affiche « **Validé** », et votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Montrez votre écran au professeur, qui validera l'atelier sur la **fiche de suivi**.

3. Une fois l'atelier validé, rangez cette fiche.

Les aides sont sur la page suivante.

★ AIDES ★

1. Écrans 2 à 4 : *voir l'exemple 2* pour le calcul de proche en proche, et *l'exemple 5* pour le sens de variation.

2. Écran 6 : seul le nombre `1000` de la ligne `seuil = 1000` est à changer ; la hauteur doit être écrite en mm. Avec `1000`, le programme doit afficher 14 pliages.

3. Des aides dépliables s'ouvrent en chemin : utilisez-les plutôt qu'une calculatrice.

ATELIER E

Modéliser une situation

Objectifs : Modéliser par une récurrence, étudier le sens de variation.
Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Répondez aux questions dans l'ordre, sur votre cahier. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

Énoncé

Un couple verse le 5 de chaque mois 200 € à son enfant, depuis un compte dont le solde était de 5 200 € au 1er janvier 2026.
On note u_n la somme, en euro, restant sur le compte après n mois : $u_0 = 5\,200$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Étudier le sens de variation de la suite u.

4. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis vérifier qu'elle est cohérente avec u_0, u_1 et u_2.

5. Le programme Python ci-dessous calcule le solde au bout d'un certain nombre de mois, sans écrire tous les termes un par un.

```
u = 5200
for n in range(12):
    u = u - 200
print(u)
```

a. Quelle ligne traduit la relation de la question 2 ?

b. La ligne `u = u - 200` est exécutée 12 fois. Quelle valeur le programme affiche-t-il ? Que représente-t-elle ?

c. Que faut-il modifier pour obtenir le solde au bout de deux ans ?

★ AIDES ★

1. Chaque mois, quelle somme quitte le compte ? Utilisez-la pour calculer u_1, puis u_2, à partir de u_0. *Valeur de contrôle* : $u_2 = 4\,800$.

2. Traduisez algébriquement « chaque mois, on retire 200 € » : $u_{n+1} = u_n \ \ldots$

3. **Question 3** *(voir l'exemple 4)* — Calculez $u_{n+1} - u_n$ directement à partir de la relation trouvée à la question 2 : nul besoin de l'expression explicite.

4. **Question 4** — Si l'on retire la même somme r chaque mois, après n mois on a retiré $n \times r$ en tout. Écrivez alors u_n à partir de u_0.

5. **Question 5** — En Python, `=` range une valeur dans une variable : `u = u - 200` remplace u par $u - 200$. Après 12 passages, on a obtenu u_{12} : vérifiez-le avec l'expression de la question 4. *Valeur de contrôle* : $u_{12} = 2\,800$.

Four à céramique : température $1\,000\,°C$, cuisson terminée !

ゴォォォォ

!!

°C 1200 1000 800 600 400 200 0

1000 °C

On l'éteint… $u_0 = 1\,000$. Chaque heure, la température est multipliée par $0{,}8$: $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n$

ガッ

ARRÊT

FOUR

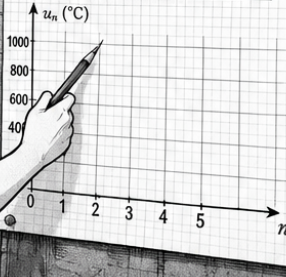
Question 1.
Quelle est la température du four après une heure de refroidissement ? Et après deux heures ?

Question 2.
On admet que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Question 3.
Représenter graphiquement le nuage de points pour n allant de 0 à 5.

Tableau :

$n = 3$	→	512
$n = 4$	→	409,6
$n = 5$	→	327,68



Question 4.
Au bout de combien de temps la température du four devient-elle inférieure à $500\,°C$?

ATELIER F

Le refroidissement du four

Objectifs : Modéliser une décroissance à taux constant, étudier son sens de variation par la méthode du rapport et résoudre un problème de seuil.
Matériel : la planche de BD. **Durée :** 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Les données et les quatre questions sont dans les bulles et les cases de la planche ci-contre : lisez-la dans l'ordre, puis répondez sur votre cahier. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

★ AIDES ★

1. Quelle opération relie la température d'une heure à la suivante ? Appliquez-la deux fois à partir de $u_0 = 1\,000$. *Valeur de contrôle* : $u_2 = 640$.

2. *(voir l'exemple 5)* — La suite est strictement positive (c'est admis dans la planche). Calculez $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et comparez-le à 1.

3. Pour le nuage de points : en abscisse n de 0 à 5, en ordonnée u_n. Complétez le tableau avec u_0, u_1, u_2 trouvés à la question 1, puis les valeurs données dans la planche.

4. Poursuivez le calcul heure par heure jusqu'à obtenir une valeur strictement inférieure à 500.

ATELIER G

Auto-évaluation

Objectifs : Faire le point sur tout le chapitre et repérer les notions à retravailler avant l'évaluation.
Matériel : un ordinateur ou un téléphone, site **MathaCoeur**. **Durée :** 20 minutes

Consignes

Le QCM comporte **dix questions** indépendantes. Cherchez chaque réponse *sur votre cahier* avant de cliquer : une fois la réponse choisie, elle est verrouillée.

La correction s'affiche aussitôt, avec une explication et un renvoi au cours : lisez-la même quand vous avez juste, elle donne souvent la rédaction attendue.

Les valeurs changent à chaque chargement : le bouton de remise à zéro relance un tirage neuf, et non le même questionnaire.

Objectif

L'objectif est d'obtenir **au moins 9 bonnes réponses sur 10**. Si vous n'y êtes pas, relisez les passages du cours signalés dans les explications, puis recommencez avec de nouvelles valeurs.

Pour faire valider

1. Laissez la page du QCM **ouverte sur le bilan final**, celui qui affiche votre score, lorsque vous aurez obtenu au moins **9 sur 10**.

2. Montrez votre écran au professeur, qui validera l'atelier sur la fiche de suivi.

3. Une fois l'atelier validé, rangez cette fiche.

★ AIDES ★

1. Le cours reste à votre disposition : ce n'est pas un contrôle et rien n'est noté.

2. *(voir l'exemple 2)* — Pour une suite définie par récurrence, il faut passer par tous les termes précédents : aucun raccourci n'est possible.

3. *(voir l'exemple 4)* — Pour une formule explicite, calculez $u_{n+1} - u_n$: si le résultat est une constante, son signe donne le sens de variation pour tous les rangs.

4. *(voir l'exemple 5)* — La méthode du rapport ne s'emploie que si la suite est strictement positive. Vérifiez toujours cette condition avant de l'appliquer.

ATELIER H

La chasse aux erreurs

Objectifs : Repérer, expliquer et corriger les erreurs classiques sur les suites, et travailler la rédaction d'une réponse juste.
Durée : 25 minutes — sans calculatrice

Consignes

Chacun des quatre extraits de copies contient exactement une erreur. Pour chacun, écrivez sur votre cahier où est l'erreur, pourquoi c'en est une, et la réponse correctement rédigée.

Copie 1

$u_n = 2n^2 - 8n + 5$. *Étudier le sens de variation de* u.

« *Je calcule* $u_0 = 5$, $u_1 = -1$ *et* $u_2 = -3$. *Les termes diminuent, donc la suite* u *est strictement décroissante.* »

Copie 2

$u_n = -3n + 7$. *Étudier le sens de variation de* u.

« $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 7 - (-3n+7) = -3n - 3 + 7 - 3n + 7 = -6n + 11$. »

Copie 3

$u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n$. *Étudier le sens de variation de* u.

« $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}5$ *et* $0{,}5 < 1$, *donc la suite* u *est strictement décroissante.* »

Copie 4

$v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$. *Calculer* v_3.

« $v_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$. »

★ AIDES ★

1. Copie 1 — Calculez deux termes de plus, u_3 et u_4. Que constatez-vous ? Combien de termes faut-il pour *démontrer* une décroissance ?

2. Copie 2 — Refaites le calcul en soulignant le signe moins devant la parenthèse : que devient $-(-3n+7)$? Un résultat qui dépend encore de n est-il attendu ici ?

3. Copie 3 *(voir l'exemple 5)* — Calculez u_0, u_1, u_2. La suite est-elle strictement positive ? Relisez alors la condition d'emploi de la méthode du rapport.

4. Copie 4 *(voir l'exemple 2)* — La suite est définie par récurrence : peut-on remplacer n par 3 directement ? Calculez v_1, puis v_2, puis v_3.

Corrigé

1. Le motif n compte n rangées de $(n+1)$ billes. Le motif 4 a donc 4 rangées de 5 billes, le motif 5 en a 5 de 6.

$$u_4 = 4 \times 5 = 20 \qquad u_5 = 5 \times 6 = 30$$

2. $u_6 = 6 \times 7 = 42$ $\qquad$ $u_7 = 7 \times 8 = 56$

3. On compare chaque expression à u_{n+1} ; une valeur fausse suffit à l'éliminer.

n	1	2	3
u_{n+1} attendu	$u_2 = 6$	$u_3 = 12$	$u_4 = 20$
$u_n + 2(n+1)$	$2+4=6$ ✓	$6+6=12$ ✓	$12+8=20$ ✓
$u_n + (n+2)$	$2+3=5$ ×	$6+4=10$ ×	$12+5=17$ ×
$u_n + n$	$2+1=3$ ×	$6+2=8$ ×	$12+3=15$ ×
$u_n + 2n$	$2+2=4$ ×	$6+4=10$ ×	$12+6=18$ ×

La première convient aussi pour $n = 4$, 5, 6 (30, 42, 56) ; vérifiée sur quelques valeurs seulement, elle *semble* correcte :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 2(n+1)}$$

Pour aller plus loin : le motif n compte n rangées de $(n+1)$ billes. En ajoutant $n+1$ billes en haut, on obtient $n+1$ rangées de $n+1$ billes. En ajoutant ensuite $n+1$ billes à droite, une au bout de chaque rangée, on obtient $n+1$ rangées de $n+2$ billes : c'est le motif $n+1$.



motif 3 — 4 rangées de 4 — motif 4

On a ajouté $(n+1)+(n+1) = 2(n+1)$ billes, ce qui *explique* la relation conjecturée.

4. On compare de même chaque expression à u_n.

n	1	2	3
u_n attendu	$u_1 = 2$	$u_2 = 6$	$u_3 = 12$
$n^2 + n + 1$	$1+1+1=3$ ×	$4+2+1=7$ ×	$9+3+1=13$ ×
$2n^2$	$2 \times 1 = 2$ ✓	$2 \times 4 = 8$ ×	$2 \times 9 = 18$ ×
$n(n+1)$	$1 \times 2 = 2$ ✓	$2 \times 3 = 6$ ✓	$3 \times 4 = 12$ ✓
$n(n-1)$	$1 \times 0 = 0$ ×	$2 \times 1 = 2$ ×	$3 \times 2 = 6$ ×

Piège : $2n^2$ convient pour $n = 1$ mais pas pour $n = 2$; un seul essai ne suffit pas pour conserver une expression. L'expression $n(n+1)$ convient jusqu'à $n = 7$ ($7 \times 8 = 56$) : c'est la description du motif, n rangées de $(n+1)$ billes.

$$\boxed{u_n = n(n+1)}$$

Cohérence des questions 3 et 4 : $u_{n+1} - u_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2(n+1)$.

ATELIER C

Corrigé — Conjecturer, puis démontrer

Partie 1 — Exercices

Exercice 1. $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$.
Comme $u_1 < u_0$, la suite u n'est pas croissante ; comme $u_2 > u_1$, elle n'est pas décroissante. Donc u **n'est pas monotone**, et c'est bien *démontré* : deux termes consécutifs bien choisis suffisent à réfuter une monotonie *(voir l'exemple 3)*.

Exercice 2. $v_1 = v_0 + 2 = -8$ et $v_2 = v_1 + 2 = -6$.
Les valeurs augmentent, on peut *conjecturer* que v est croissante, mais ce n'est **pas démontré** : trois valeurs ne garantissent rien pour les rangs suivants.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = (v_n + 2) - v_n = 2 > 0$, donc $v_{n+1} > v_n$: v **est strictement croissante** *(voir l'exemple 4)*. Le calcul littéral vaut cette fois pour tous les rangs.

Partie 2 — Les quatre familles

Suite	Termes	Méthode	Justification
A1	B4	C3	$u_1 < u_0$ puis $u_2 > u_1$: contre-exemple
A2	B1	C4	$u_{n+1} - u_n = 2 > 0$: croissante
A3	B2	C1	$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$: décroissante
A4	B3	C2	$u_{n+1}/u_n = 0{,}8 < 1$ et $u_n > 0$: décroissante

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche, ce corrigé et le **jeu de 12 cartes**, et votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé, rangez le matériel (comptez les 12 cartes).

Corrigé

1. Chaque mois, 200 € quittent le compte :

$$u_1 = u_0 - 200 = 5\,000 \qquad u_2 = u_1 - 200 = 4\,800$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - 200$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -200 < 0$$

donc $u_{n+1} < u_n$: **la suite u est strictement décroissante** *(voir l'exemple 4)*. La différence ne dépend pas de n : la conclusion vaut pour tous les rangs.

4. Chaque mois on retire 200 €, donc après n mois on a retiré $200n$ en tout :

$$u_n = 5\,200 - 200n$$

Vérification : $u_0 = 5\,200$, $u_1 = 5\,200 - 200 = 5\,000$, $u_2 = 5\,200 - 400 = 4\,800$. Les trois valeurs concordent.

5. a. La ligne `u = u - 200` traduit $u_{n+1} = u_n - 200$.
b. La ligne est exécutée 12 fois : le programme affiche u_{12}, le solde au bout de 12 mois. D'après la question 4, $u_{12} = 5\,200 - 200 \times 12 = 5\,200 - 2\,400 = 2\,800$: il affiche `2800`.
c. Deux ans font 24 mois : on remplace `range(12)` par `range(24)`. Le programme affiche alors $u_{24} = 5\,200 - 4\,800 = 400$.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche et ce corrigé, et votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.
2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.
3. Une fois l'atelier validé, rangez le matériel.

Corrigé

1. $u_1 = 1\,000 \times 0{,}8 = 800$ et $u_2 = 800 \times 0{,}8 = 640$: après 1 h le four est à 800 °C, après 2 h à 640 °C.

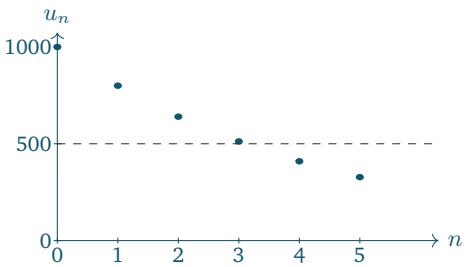
2. La suite u est strictement positive (admis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0{,}8\,u_n}{u_n} = 0{,}8 < 1$$

donc $u_{n+1} < u_n$ (car $u_n > 0$) : u **est strictement décroissante** *(voir l'exemple 5)*.

3. Tableau de valeurs et nuage de points :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1 000	800	640	512	409,6	327,68



Le nuage décroît de moins en moins vite : les écarts entre termes consécutifs diminuent.

4. $u_3 = 512 \geqslant 500$ et $u_4 = 409{,}6 < 500$: c'est **après 4 heures** que la température passe pour la première fois sous les 500 °C.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche BD-consignes et ce corrigé, et votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé, rangez le matériel.

Corrigé

Copie 1 — conjecturer n'est pas démontrer

Les trois valeurs sont exactes, mais elles ne prouvent rien pour les rangs suivants. En poursuivant : $u_3 = -1$ et $u_4 = 5$, les termes *remontent*.
Rédaction correcte : $u_1 < u_0$ donc u n'est pas croissante ; $u_4 > u_3$ donc u n'est pas décroissante. La suite u **n'est pas monotone**.

Copie 2 — signe oublié devant la parenthèse

$-(-3n+7)$ vaut $+3n-7$, et non $-3n+7$.
Rédaction correcte : $u_{n+1} - u_n = (-3(n+1)+7) - (-3n+7) = -3n-3+7+3n-7 = -3$, constante strictement négative : u est **strictement décroissante**. Un résultat dépendant encore de n aurait dû alerter.

Copie 3 — méthode du rapport hors de son domaine

Le rapport exige une suite **strictement positive**. Or $u_0 = -2$, $u_1 = -1$, $u_2 = -0{,}5$: tous les termes sont négatifs, et la suite est en réalité *croissante*.
Rédaction correcte : $u_{n+1} - u_n = 0{,}5\,u_n - u_n = -0{,}5\,u_n$. Comme $u_n < 0$, on a $-0{,}5\,u_n > 0$: u est **strictement croissante**.

Copie 4 — récurrence traitée comme formule explicite

On ne peut pas remplacer n par 3 : la relation donne chaque terme à partir du *précédent*.
Rédaction correcte : $v_1 = 2\times1+3 = 5$; $v_2 = 2\times5+3 = 13$; $v_3 = 2\times13+3 = \mathbf{29}$.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche et ce corrigé, et votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question sur l'atelier avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé, rangez le matériel.