TRIGONOMÉTRIE

Le radian, le cosinus et le sinus

Première spécialité mathématiques — chapitre 104

Comment travailler. On choisit un atelier, on le fait sur son cahier, on va chercher le corrigé, on se corrige soi-même, puis on demande la validation du professeur.

Comment naviguer. Cliquez sur les pastilles : les bleues restent dans ce document, les dorées ouvrent un fichier en ligne. Pour revenir à ce menu, cliquez sur le bandeau de titre en haut de la page où vous vous trouvez.

Le cours

Définitions 1 à 4, théorèmes 1 et 2, les trois exemples, et les démonstrations au programme.

Ouvrir le cours

La vérification

QCM en deux parties : les définitions et théorèmes, puis les exemples du cours. Ni noté, ni chronométré.

Ouvrir le QCM de vérification

Les ateliers

Réalisables dans l'ordre de votre choix. Capacités attendues : 1 h 10.

	Intitulé	Type	Durée	Documents
A	Radians, mode d'emploi	Cap. att.	25 min	Consignes · Corrigé
B	Le paquet de copies	Cap. att.	25 min	Consignes · Corrigé
C	Le trio du cercle	Cap. att.	20 min	Consignes · Cartes · Corrigé
D	La chaîne du cercle	Conso.	20 min	Consignes · Dominos · Corrigé
E	Le cercle a menti deux fois	Conso.	20 min	Règle du jeu · Flashcards en ligne
F	Archimède contre le cercle	Approf.	35 min	Consignes · Parcours en ligne
G	Dix questions, un tour de cercle	Conso.	20 min	Consignes · QCM en ligne

TRIGONOMÉTRIE

Cours

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur »

Gert Martin Greuel

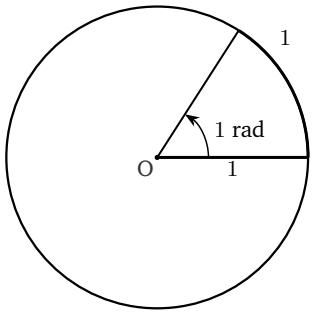
Dans ce chapitre, nous allons définir une nouvelle unité de mesure des angles, aborder intuitivement la notion d'angle orienté, et redéfinir le sinus et le cosinus en étendant les définitions du collège pour ne plus être limité aux seuls angles aigus.

I. LE RADIAN

Définition 1. Dans un repère orthonormé d'origine O, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

Le radian est l'unité de mesure des angles du système international d'unités (SI).

Définition 2. Le **radian**, noté rad, est la mesure d'un angle qui intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de longueur 1.

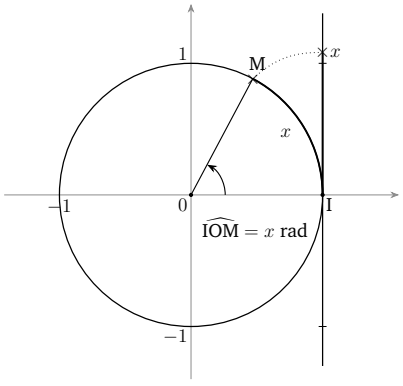


Voyons comment comprendre cette unité de mesure des angles.

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = 1$ (voir ci-dessous). En « enroulant » cette droite graduée à partir du point $\mathrm{I}(1\,;0)$ sur le cercle trigonométrique (illustration en animation) :

- à tout réel x est associé un seul point M du cercle trigonométrique ;
- à tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels.

Définition 3. On appelle **mesure en radian** de l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ tout nombre réel x associé au point M.



Cette définition appelle trois remarques :

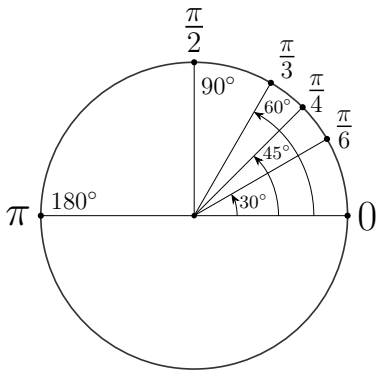
- la mesure en radian d'un angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ compris entre $0°$ et $360°$ ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) correspond donc à la longueur de l'**arc de cercle** IM ;
- l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ est ainsi « **orienté** » de I vers M : si M′ est le symétrique de M par rapport à (OI), l'angle $\widehat{\mathrm{IOM'}}$ a pour mesure $-x$;
- une mesure en radian est par définition un nombre réel (donc **sans unité**) : $x\,\text{rad} = x$. L'unité pourra donc ne pas être écrite.

Théorème 1. $360° = 2\pi$ rad $\qquad 180° = \pi$ rad $\qquad 90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad

Démonstration. $360°$ correspond au tour complet du cercle. Or le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π. D'où la première égalité. Les autres correspondent à la longueur du demi-cercle trigonométrique et à celle du quart de cercle trigonométrique.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité. Il donne les mesures les plus utilisées. Il faut les connaître par cœur.

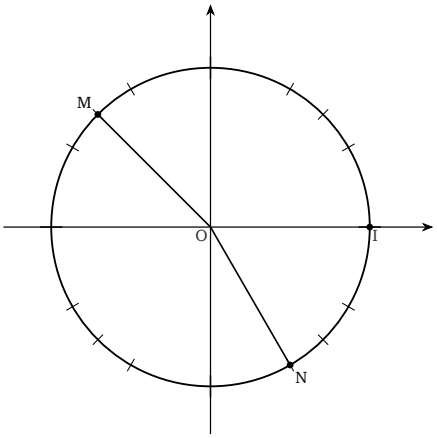
Mesure en degré	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
Mesure en radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π



Démonstration. Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés : $90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad donc la moitié donne $45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad, le tiers donne $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad et les deux tiers $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

Exemple 1. Marquer sur le cercle trigonométrique le point M correspondant à $\dfrac{3\pi}{4}$ et le point N correspondant à $-\dfrac{\pi}{3}$.

Solution. Voir la figure ci-contre.



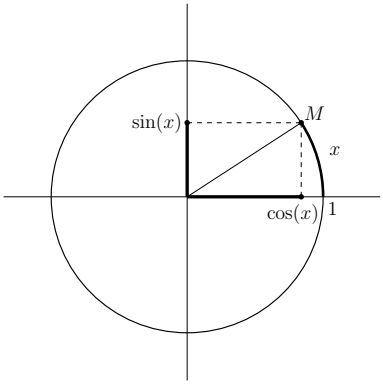
II. Le cosinus et le sinus d'un réel

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport entre la longueur du côté adjacent à l'angle et l'hypoténuse et le sinus d'un angle aigu est égal au rapport entre la longueur du côté opposé à l'angle et l'hypoténuse. Ces définitions sont possibles parce que ces rapports trigonométriques ne dépendent que des angles et non des longueurs des côtés. Mais elles ne sont valables que pour des angles aigus. Nous allons étendre ces définitions à tous les angles grâce au cercle trigonométrique.

Définition 4. Soient x un réel et $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}\,;y_\mathrm{M})$ le point du cercle trigonométrique associé à x.

On appelle **cosinus de x** l'abscisse de M et **sinus de x** l'ordonnée de M.

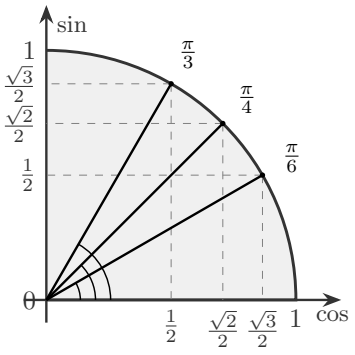
$$\cos(x) = x_\mathrm{M} \quad \text{et} \quad \sin(x) = y_\mathrm{M}$$



Lorsque $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (angle aigu), cette définition correspond alors à celle du cosinus dans un triangle rectangle. En effet, l'hypoténuse du triangle rectangle est alors le rayon du cercle trigonométrique et vaut donc 1.

Quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus doivent être connues.

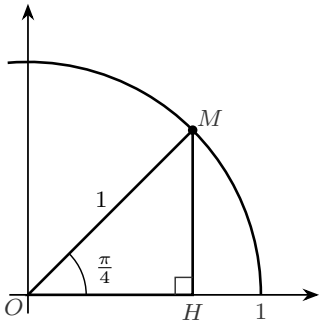
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstrations au programme. Les cosinus et sinus des cas $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ s'obtiennent facilement.

Si $x = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$, le triangle rectangle OHM est isocèle en H et le théorème de Pythagore donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = x_{\mathrm{M}} = y_{\mathrm{M}} = \mathrm{OH} = \mathrm{HM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



La démonstration est similaire si $x = \frac{\pi}{6}$ $(30°)$.

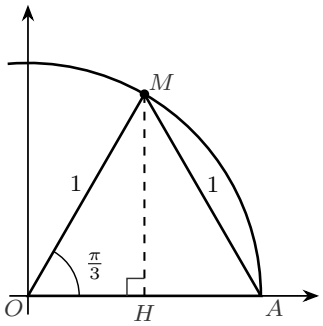
Si $x = \frac{\pi}{3}$ $(60°)$, le triangle OAM est équilatéral donc H est le milieu de [OA] ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x_{\mathrm{M}} = \mathrm{OH} = \frac{1}{2}.$$

En appliquant ensuite le théorème de Pythagore dans OMH, on obtient : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_{\mathrm{M}} = \mathrm{HM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Enfin, le triangle OHM est égal à celui de la démonstration ci-dessus en permutant les côtés OH et HM ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$



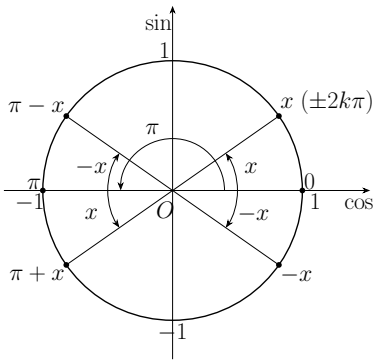
Théorème 2. Pour tout réel x et tout entier relatif k :

$\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$



Démonstration. Notons M le point associé à x.

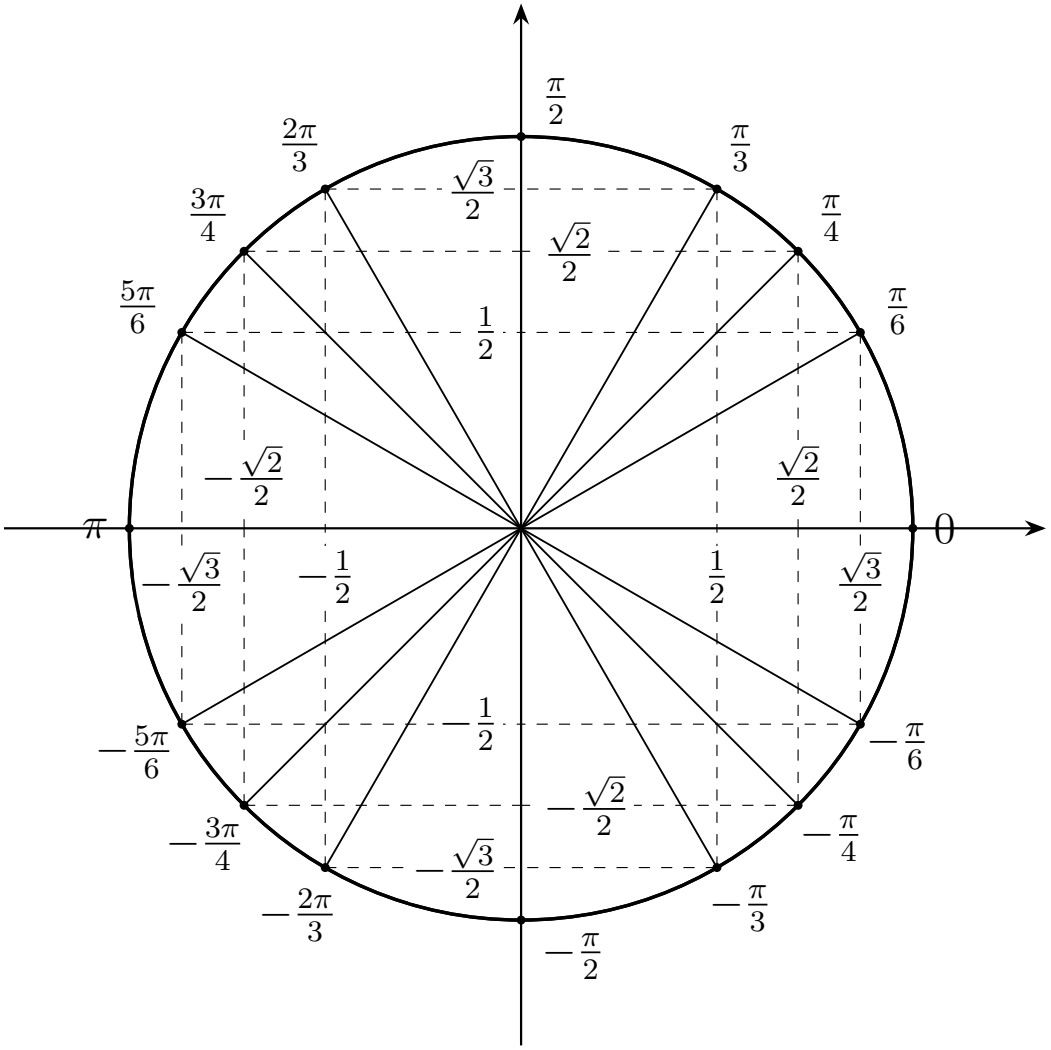
Le point associé à $x + k \times 2\pi$ est M lui-même (définition 3) : ses coordonnées sont inchangées.

Le point associé à $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses : son abscisse est inchangée, son ordonnée est changée en son opposée.

Le point associé à $\pi - x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées : son abscisse est changée en son opposée, son ordonnée est inchangée.

Le point associé à $\pi + x$ est le symétrique de M par rapport à O : ses deux coordonnées sont changées en leurs opposées.

Cercle trigonométrique avec valeurs remarquables à savoir retrouver



Exemple 2. Par lecture du cercle trigonométrique, donner $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Solution. Le point associé à $\frac{2\pi}{3}$ est le symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, du point associé à $\frac{\pi}{3}$: son ordonnée est inchangée et son abscisse est changée en son opposée. Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemple 3. Par lecture du cercle trigonométrique, donner $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Solution. Les points associés à $-\frac{\pi}{4}$ et à $\frac{5\pi}{6}$ sont les symétriques du point associé à $\frac{\pi}{4}$, respectivement par rapport à l'axe des abscisses, et du point associé à $\frac{\pi}{6}$, par rapport à l'axe des ordonnées. Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

ATELIER A

Radians, mode d'emploi

Objectifs : Passer des degrés aux radians, lire et placer un point sur le cercle trigonométrique. **Durée :** 25 min — sans calculatrice

Consignes

Traitez les trois exercices dans l'ordre de votre choix, en rédigeant sur votre cahier : une conversion se justifie par un calcul, un placement par une figure. Corrigé à aller chercher.

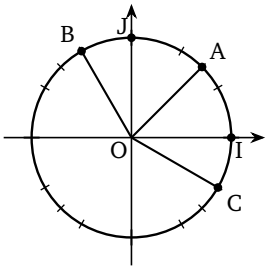
Exercice 1 — Changer d'unité

1. Convertir en radians *(voir le théorème 1)* : **a.** $60°$ **b.** $90°$ **c.** $135°$

2. Convertir en degrés : **a.** $\frac{\pi}{6}$ **b.** $\frac{2\pi}{3}$ **c.** $-\frac{\pi}{4}$

Exercice 2 — Lire, puis placer

1. Les points A, B et C sont placés sur le cercle trigonométrique ci-contre. Donner, pour chacun, le réel qui lui est associé. *(voir la définition 3)*



2. Tracer un cercle trigonométrique sur le cahier, puis y placer le point D associé au réel $\frac{5\pi}{6}$. *(voir l'exemple 1)*

Exercice 3 — Un point, plusieurs réels

1. Le point M est associé au réel $\frac{\pi}{3}$. Donner deux autres réels associés à M. *(voir le théorème 2)*

2. Déterminer le réel compris entre $-\pi$ et π qui est associé au même point que $\frac{13\pi}{6}$.

★ AIDES ★

1. Exercice 1 *(théorème 1)* — $180°$ correspond à π rad, et les deux mesures sont proportionnelles. Pour passer des degrés aux radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$ puis on simplifie ; dans l'autre sens, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$. *Valeur de contrôle* : $60° = \frac{\pi}{3}$.

2. Exercice 2, question 1 — Le cercle porte, dans chaque quadrant, les graduations à $30°$, $45°$ et $60°$. Repérez celle qui porte le point, puis convertissez : $30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $60° = \frac{\pi}{3}$. Un point situé sous l'axe horizontal peut être associé à un réel négatif. *Valeur de contrôle* : A est associé à $\frac{\pi}{4}$.

3. Exercice 2, question 2 — Le dénominateur donne le pas : $\frac{5\pi}{6}$, ce sont cinq pas de $\frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire cinq pas de $30°$ à partir de I, dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre). Le point D est dans le deuxième quadrant, en haut à gauche.

4. Exercice 3 *(théorème 2, première ligne)* — Ajouter ou retrancher 2π revient à faire un tour complet : on retombe sur le même point. Pour la question 2, écrivez d'abord les deux termes avec le même dénominateur : $2\pi = \frac{12\pi}{6}$, donc $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6}$.

ATELIER B

Le paquet de copies

Objectifs : Repérer, expliquer et corriger des erreurs classiques du chapitre. **Durée :** 25 min — sans calculatrice

Consignes

Quatre élèves ont rendu une copie ; toutes ne sont pas fausses.

1. Pour chaque copie, indiquez si le résultat annoncé est juste ou faux.
2. Pour chaque copie fausse, expliquez l'erreur et rédigez une correction soignée.
3. Une copie donne un résultat juste par un raisonnement faux : repérez-la.

Les quatre copies

Copie de Naïm — *Donner* $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

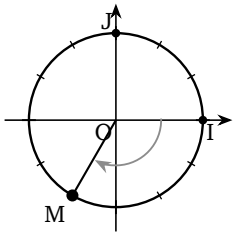
$\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Copie de Yanis — *Donner* $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

$-\frac{\pi}{3}$ a la même hauteur que $\frac{\pi}{3}$, donc $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Copie de Zoé — *Placer le point M associé à* $\frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$: à partir de I, je tourne de 120°, ce qui me place M ici.



Copie d'Inès — *Donner* $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

$\frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, donc $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

★ AIDES ★

1. Copies de Naïm et d'Inès *(théorème 2)* — Les deux élèves ont bien reconnu la forme $\pi - x$. Il reste à appliquer la bonne ligne du théorème, sans en modifier ni le signe ni la fonction : le cosinus et le sinus ne s'échangent jamais.

2. Copie de Yanis *(théorème 2)* — Les points de x et de $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : ils ont la même abscisse, mais des ordonnées *opposées*.

3. Une lecture sur le cercle tranche à chaque fois : le point de $\frac{5\pi}{6}$ est à gauche de l'axe vertical, donc son abscisse est négative ; celui de $-\frac{\pi}{3}$ est sous l'axe horizontal, donc son ordonnée est négative.

4. Copie de Zoé *(définition 3)* — Le signe du réel donne le sens de parcours : un réel positif s'enroule dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. *Valeur de contrôle* : $\frac{2\pi}{3} = 120°$, le point est dans le deuxième quadrant, en haut à gauche.

5. Question 3 — Comparez $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$: ils sont égaux, ce qui suffit à masquer une erreur de raisonnement. Demandez-vous ce que donnerait la même méthode avec $\frac{\pi}{3}$ à la place de $\frac{\pi}{4}$.

ATELIER C

Le trio du cercle

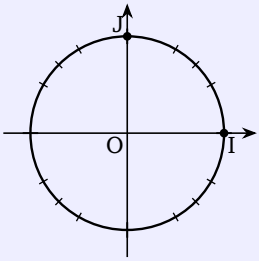
Objectifs : Relier une mesure en radian, le point qu'elle repère sur le cercle trigonométrique et la valeur de son cosinus ou de son sinus.
Matériel : Jeu de 24 cartes **Durée :** 20 min — sans calculatrice

Consignes et travail à réaliser

Les 24 cartes se répartissent en 8 trios : une carte R (une mesure en radian), une carte P (un point du cercle trigonométrique) et une carte V (la valeur du cosinus ou du sinus). Notez vos réponses sur votre cahier. Corrigé à aller chercher.

1. Formez les 8 trios. *(voir la définition 4)*

2. Notez-les sur votre cahier sous la forme : `R... - P... - V...`



Les huit points du jeu se trouvent parmi ces graduations.

✦ AIDES ✦

1. Commencez par les cartes R : convertissez chaque mesure en degré pour situer le point ($\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$). *Valeur de contrôle* : six des huit points sont au-dessus de l'axe horizontal.

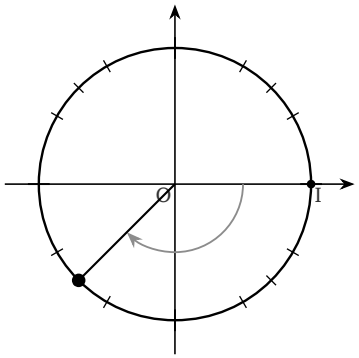
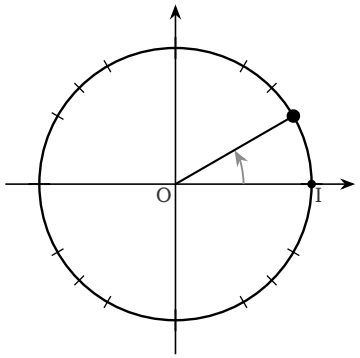
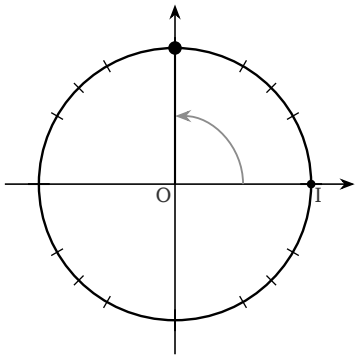
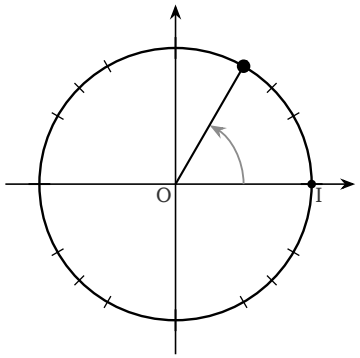
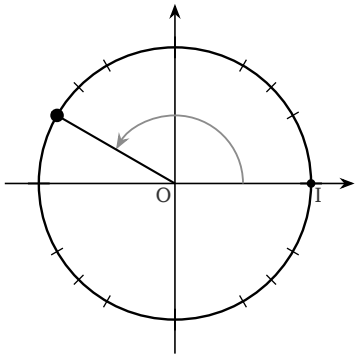
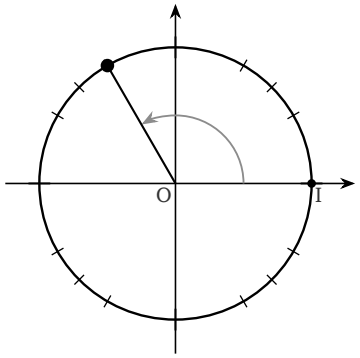
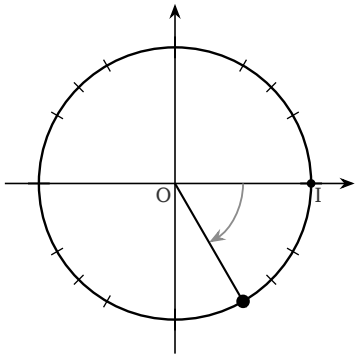
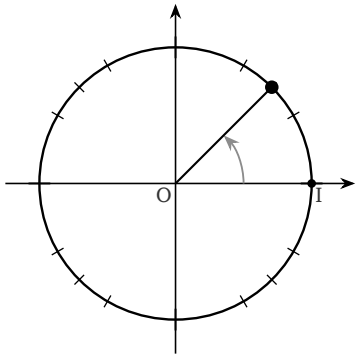
2. Une carte V ne donne qu'*une* des deux coordonnées du point *(définition 4)* : le cosinus se lit sur l'axe horizontal, le sinus sur l'axe vertical. Son signe suffit déjà à éliminer la moitié des cartes P.

3. Sur une carte P, la flèche indique le sens de parcours depuis I : elle vous donne directement le signe de la mesure en radian *(définition 3)*.

4. Une carte V peut sembler convenir à plusieurs cartes R : n'en concluez rien tout de suite. Formez d'abord les trios dont la valeur ne laisse aucun doute ; les cartes qui restent lèveront l'ambiguïté.

5. Quatre des huit trios : r six, p deux, v cinq ; r cinq, p trois, v huit ; r un, p six, v sept ; r sept, p un, v quatre.

R1 $\frac{2\pi}{3}$	**R2** $-\frac{\pi}{3}$	**R3** $\frac{\pi}{4}$	**R4** $\frac{5\pi}{6}$
R5 $\frac{\pi}{2}$	**R6** $\frac{\pi}{6}$	**R7** $-\frac{3\pi}{4}$	**R8** $\frac{\pi}{3}$
V1 Le sinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**V2** Le cosinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**V3** Le cosinus vaut $\frac{1}{2}$	**V4** Le sinus vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

V5	V6	V7	V8
Le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Le sinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	Le cosinus vaut $-\frac{1}{2}$	Le sinus vaut 1
P1 	**P2** 	**P3** 	**P4** 
P5 	**P6** 	**P7** 	**P8** 

ATELIER D

La chaîne du cercle

Objectifs : Retrouver de tête les conversions et les valeurs remarquables du cercle trigonométrique.
Matériel : Jeu de 12 dominos **Durée :** 20 min — sans calculatrice

Consignes et travail à réaliser

Chaque domino porte, à gauche, un **nombre** et, à droite, une **question**. On place à la suite d'un domino celui dont le nombre de gauche est la réponse à sa question. Rédigez vos calculs sur votre cahier. Corrigé à aller chercher.

1. Reconstituez la chaîne des 12 dominos. Elle doit **se refermer sur elle-même** : la réponse à la question du dernier domino est le nombre porté par le premier.

2. Écrivez la chaîne obtenue sous forme d'une liste de codes, en partant de D1.

✦ AIDES ✦

1. Pour les trois questions de conversion *(théorème 1)* : $180°$ correspond à π rad, et les deux mesures sont proportionnelles. *Valeur de contrôle* : $45° = \frac{\pi}{4}$.

2. Le tableau du cours donne cos et sin pour 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Pour les autres angles, ramenez-vous à l'un d'eux à l'aide du théorème 2, par exemple $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$.

3. *Valeur de contrôle* : les 12 nombres portés par les dominos sont tous différents. Chaque réponse ne peut donc convenir qu'à un seul domino ; si vous obtenez un nombre absent du jeu, le calcul est à revoir.

4. Deux maillons de la chaîne : d un, puis d neuf, puis d cinq ; d six, puis d sept, puis d trois. Attention au piège : $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ figurent bien sur des dominos, mais on les obtient aussi en oubliant un signe moins. Vérifiez le signe sur le cercle avant de poursuivre.

D1

Donner la mesure en degré de $\frac{2\pi}{3}$.

0

D2

Donner $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$\frac{1}{2}$

D3

Donner $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$\frac{\pi}{4}$

D4

Donner le réel compris entre $-\pi$ et π associé au même point que $\frac{7\pi}{4}$.

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D5

Donner $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D6

Donner $\cos(\pi)$.

$-60°$

D7

Donner la mesure en radian de $45°$.

-1

D8

Donner $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

1

D9

Donner $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

$120°$

D10

Donner la mesure en degré de $-\frac{\pi}{3}$.

$-\frac{\pi}{4}$

D11

Donner $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D12

Donner $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$-\frac{1}{2}$

ATELIER E

Le cercle a menti deux fois

Objectifs : Mémoriser les définitions et les théorèmes du chapitre, et repérer une réponse fausse.
Matériel : Un écran **Durée :** 20 min — sans calculatrice

La règle du jeu

Le jeu se trouve sur le site MathaCoeur, à l'adresse

`https://mathacoeur.com/documents/104-E.html`

Il comporte **12 cartes**, chacune identifiée par un code (F1, F2…) inscrit au-dessus du texte, sur ses deux faces. Ces codes sont dans le désordre : impossible de situer une carte en comptant. **Deux de ces douze cartes portent une réponse fausse.** À vous de les débusquer. Cet atelier peut se faire seul ou à deux, en s'interrogeant mutuellement.

1. Les cartes défilent une par une, dans un ordre aléatoire. Cherchez la réponse, puis cliquez sur la carte pour la retourner, **autant de fois que vous le souhaitez**.

2. Chaque carte porte au recto un **renvoi au cours** : en cas de doute, allez vérifier avant de vous prononcer. C'est le cœur de l'atelier.

3. Prononcez-vous ensuite : « **Juste** » (la carte ne reviendra plus), « **J'hésite** » (elle repart en fin de liste), « **Carte menteuse !** » (elle occupe l'un des deux emplacements affichés en haut de l'écran ; une croix permet de l'en retirer).

4. Le jeu s'arrête lorsque plus aucune carte n'est à examiner **et** que les deux emplacements sont occupés.

5. L'écran indique alors si vos deux cartes sont les bonnes, si une seule l'est — il précise laquelle — ou si aucune ne l'est. Dans les deux derniers cas, la chasse est à refaire.

6. Le bouton **Réinitialiser**, en haut à droite, relance le jeu depuis le début à tout moment.

★ AIDES ★

1. Ne vous fiez pas à votre impression : une réponse fausse est écrite exactement comme une réponse juste. Le seul juge est le cours, et le renvoi figure au recto de chaque carte.

2. Les deux erreurs ne sont pas de même nature. L'une est **franche** : l'énoncé lui-même est faux, et une autre carte du jeu le contredit. L'autre est **subtile** : la réponse est juste, seul un élément de l'exemple qui l'accompagne ne l'est pas — et il n'est pas forcément en fin de liste.

3. Contrôlez systématiquement les exemples numériques : dessinez un cercle à main levée, placez le point, et lisez son abscisse et son ordonnée. Un signe se vérifie en quelques secondes, sans aucun calcul.

4. Les deux cartes menteuses renvoient, l'une au **théorème 2**, l'autre à la **définition 4**. Relisez ces deux encadrés du cours, puis reprenez la chasse.

5. Les deux cartes menteuses sont **f quatre** et **f dix**.

Pour faire valider

1. Laissez affiché l'**écran final**, celui qui nomme les deux cartes menteuses, et gardez cette fiche sur la table.

2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question avant de la tamponner. Sachez dire, pour chaque carte menteuse, **en quoi la réponse est fausse** et **quelle est la bonne réponse**.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez cette fiche.

ATELIER F

Archimède contre le cercle

Objectifs : Suivre le raisonnement qui relie le cercle trigonométrique, le sinus et l'algorithmique, jusqu'au calcul de valeurs approchées de π.
Matériel : Un écran **Durée :** 35 min — sans calculatrice

Consignes

Le parcours se trouve sur le site MathaCoeur, à l'adresse

`https://mathacoeur.com/documents/104-F.php`

Il compte huit écrans, à parcourir dans l'ordre à l'aide des boutons du bas. Il ne s'agit pas de refaire les calculs mais de **suivre un raisonnement** : lisez, manipulez les figures, et répondez aux questions qui vérifient votre lecture. Chaque question ne compte que si vous répondez juste **du premier coup** : lisez avant de cliquer. Les paragraphes signalés par un triangle s'ouvrent d'un clic et donnent le détail d'un calcul ou d'une justification.

Ce que vous allez y trouver

1. Un curseur qui fait tourner le nombre de côtés du polygone inscrit, et son périmètre qui se rapproche de celui du cercle.

2. La construction qui transforme la longueur d'un côté en un sinus, puis en une valeur approchée de π.

3. Le « serpent qui se mord la queue » : un programme qui utilise π pour calculer π.

4. La relation de doublement, obtenue avec deux fois le théorème de Pythagore, et la machine qui l'applique sous vos yeux.

★ AIDES ★

1. Le cercle du parcours est celui du cours : rayon 1, donc périmètre 2π *(voir la définition 1)*. Gardez cette idée en tête, c'est elle qui fait que la longueur d'un côté *est* un sinus.

2. Écran 2 — Si vous hésitez sur $\widehat{AOM}$, souvenez-vous que les n côtés se partagent le tour complet, soit 2π, et que M est le milieu de $[AB]$.

3. Écran 4 — Comparez chaque valeur affichée avec $\pi = 3{,}1415926\ldots$ en avançant chiffre après chiffre, sans vous fier à l'allure générale du nombre.

4. Écran 6 — Le seul outil utilisé est le théorème de Pythagore, appliqué deux fois : dans le triangle OAM, puis dans le triangle AMC. Ouvrez le détail du calcul si les deux termes en a_n^2 ne semblent pas se simplifier.

Pour faire valider

1. Laissez le **huitième écran** (« Ce qu'il faut retenir ») affiché, avec votre parcours indiqué en bas, et gardez cette fiche sur la table.

2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez cette fiche.

ATELIER G

Dix questions, un tour de cercle

Objectifs : Faire le point sur le chapitre et repérer ce qui reste à retravailler.
Matériel : Un écran **Durée :** 20 min — sans calculatrice

Consignes

Le QCM se trouve sur le site MathaCoeur, à l'adresse

`https://mathacoeur.com/documents/104-G.php`

Il compte **10 questions** indépendantes. Objectif : **8 bonnes réponses au moins**.

Pour chaque question, cherchez la réponse *sur votre cahier*, en vous aidant d'un croquis du cercle, avant de cliquer. **Une fois la réponse choisie, elle est verrouillée.** La correction s'affiche aussitôt, avec une explication : lisez-la même lorsque vous avez juste, elle donne souvent la justification attendue.

Le bouton « **Recommencer** » relance un questionnaire neuf : les angles et les valeurs changent à chaque fois.

Cet atelier n'est ni un contrôle ni une note : **consultez votre cours aussi souvent que vous le souhaitez**. Notez le numéro des questions manquées et relisez le passage correspondant.

Pour faire valider

1. Laissez la page du QCM **ouverte** sur un résultat d'au moins **8 sur 10**.
2. Présentez votre **fiche de suivi** au professeur : il vous posera une question.
3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez cette fiche.

★ AIDES ★

1. Du radian au degré, une seule chose à retenir : $180° = \pi$ rad, et les deux mesures sont proportionnelles *(théorème 1)*.
2. Commencez par un croquis : le cercle, les points I et J, le point cherché. Le cosinus se lit sur l'axe horizontal, le sinus sur l'axe vertical *(définition 4)* : les signes se voient alors sans calcul.
3. Trois symétries suffisent pour les angles associés *(théorème 2)* : $-x$ par rapport à l'axe des abscisses, $\pi - x$ par rapport à l'axe des ordonnées, $\pi + x$ par rapport à O.
4. Pour revenir dans $[0\,;2\pi[$, ajoutez ou retirez 2π en passant par le dénominateur commun : $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}$. *Valeur de contrôle* : un réel de $[0\,;2\pi[$ correspond à un angle entre $0°$ et $360°$.

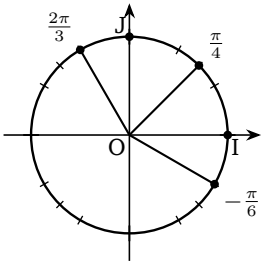
Exercice 1 — Changer d'unité

1. $60° = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$; $90° = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$; $135° = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$.

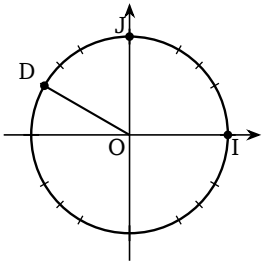
2. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{6} \times 180° = 30°$; $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$; $-\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4} \times 180° = -45°$.

Exercice 2 — Lire, puis placer

1. A est sur la graduation à $45°$ de I : il est associé à $\frac{\pi}{4}$.
B est sur celle à $120°$: il est associé à $\frac{2\pi}{3}$.
C est sous l'axe horizontal, sur la graduation à $30°$ de I : il est associé à $-\frac{\pi}{6}$.
Autres réponses possibles : tout réel obtenu en ajoutant un nombre entier de tours convient aussi, par exemple $\frac{11\pi}{6}$ pour C.



2. $\frac{5\pi}{6}$, ce sont cinq pas de $\frac{\pi}{6}$, soit cinq pas de $30°$ depuis I dans le sens direct : $\frac{5\pi}{6} = 150°$. Le point D est dans le deuxième quadrant.



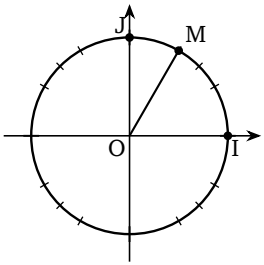
Exercice 3 — Un point, plusieurs réels

1. D'après le théorème 2, ajouter ou retrancher un tour complet ne change pas le point. On écrit d'abord les deux termes avec le même dénominateur :

$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$

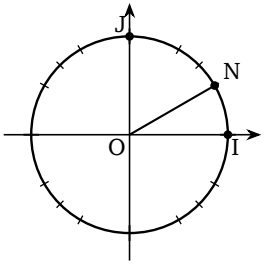
Les réels $\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{3}$ sont donc associés à M, comme $\frac{\pi}{3}$.



2. On écrit $2\pi = \frac{12\pi}{6}$, puis

$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$.

Le réel cherché est donc $\frac{\pi}{6}$: il est bien compris entre $-\pi$ et π, et il repère le même point N que $\frac{13\pi}{6}$.



Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche et ce corrigé, le **cahier** ouvert à la page de l'atelier.
2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous posera une question avant de la tamponner.
3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez la fiche et ce corrigé.

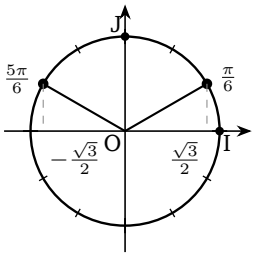
Copie de Naïm — fausse

Le théorème 2 donne $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$: le signe moins a été oublié.

Correction : $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les points de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{5\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : leurs abscisses sont opposées.

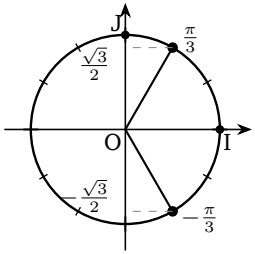


Copie de Yanis — fausse

Les points de x et de $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : ils ont la même abscisse, mais des ordonnées *opposées*. Le théorème 2 donne $\sin(-x) = -\sin(x)$.

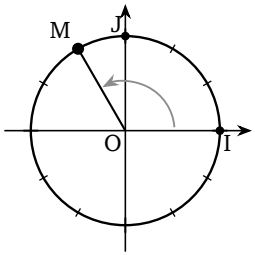
Correction :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Copie de Zoé — fausse

Le réel $\frac{2\pi}{3}$ est positif : l'enroulement se fait dans le **sens direct** *(définition 3)*, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Zoé a tourné dans l'autre sens et a placé le point associé à $-\frac{2\pi}{3}$.



Correction : $\frac{2\pi}{3} = 120°$, le point M est dans le deuxième quadrant.

Copie d'Inès — résultat juste, raisonnement faux

La mise sous la forme $\pi - x$ est correcte, mais le théorème 2 donne $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, et non $\cos(x)$: Inès a changé de fonction en cours de route. L'erreur ne se voit pas ici, car $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ valent tous deux $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rédaction attendue : $\frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, donc $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Avec $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, la même méthode donnerait $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, alors que $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$: la coïncidence ne se reproduit pas.

Pour faire valider

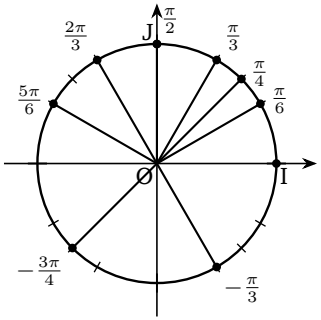
1. Gardez sur la table la fiche et ce corrigé, le **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous posera une question avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez la fiche et ce corrigé.

Les 8 trios

Trio	Radian	Degré	Valeur donnée
R6 – P2 – V5	$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
R3 – P8 – V1	$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
R8 – P4 – V3	$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
R5 – P3 – V8	$\frac{\pi}{2}$	$90°$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
R1 – P6 – V7	$\frac{2\pi}{3}$	$120°$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
R4 – P5 – V2	$\frac{5\pi}{6}$	$150°$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
R2 – P7 – V6	$-\frac{\pi}{3}$	$-60°$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
R7 – P1 – V4	$-\frac{3\pi}{4}$	$-135°$	$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



La carte à double emploi

La carte **V3** convient à deux mesures, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$: leurs points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et ont donc la même abscisse *(théorème 2)*. C'est **V6**, qui annonce un sinus négatif, qui tranche : elle ne peut aller qu'à $-\frac{\pi}{3}$. La carte V3 revient donc à $\frac{\pi}{3}$, et la solution du jeu est unique.

Pour faire valider

1. Gardez la fiche, ce corrigé et le jeu sur la table, le **cahier** ouvert, et présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous posera une question.

2. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le tout en comptant les **24 cartes**.

La chaîne (elle se referme)

D1 $\longrightarrow$ **D9** $\longrightarrow$ **D5** $\longrightarrow$ **D12** $\longrightarrow$ **D2** $\longrightarrow$ **D8** $\longrightarrow$ **D4** $\longrightarrow$ **D10** $\longrightarrow$ **D6** $\longrightarrow$ **D7** $\longrightarrow$ **D3** $\longrightarrow$ **D11** $\longrightarrow$ **D1**

Détail des calculs

D1 $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \times 180^\circ = \mathbf{120^\circ}$ *(théorème 1)*.

D9 $\frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, donc $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ *(théorème 2)*.

D5 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

D12 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

D2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{1}$.

D8 $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$.

D4 $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = \frac{7\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{\pi}{\mathbf{4}}$.

D10 $-\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{3} \times 180^\circ = \mathbf{-60^\circ}$.

D6 $\cos(\pi) = \mathbf{-1}$: le point associé à π est le symétrique de I par rapport à O.

D7 $45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{\mathbf{4}}$.

D3 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$.

D11 $\frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$, qui est le nombre du domino D1 : la chaîne est bouclée.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche, ce corrigé et le **jeu de dominos**, le **cahier** ouvert à la page de l'atelier.
2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous posera une question avant de la tamponner.
3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le tout en comptant les **12 dominos**.