LA DÉRIVATION

1. Point de vue local

Première spécialité mathématiques — chapitre 105

Comment travailler. On choisit un atelier, on le fait sur son cahier, on va chercher le corrigé, on se corrige soi-même, puis on demande la validation du professeur.

Comment naviguer. Cliquez sur les pastilles : les **bleues** restent dans ce document, les **dorées** ouvrent un fichier en ligne. Pour revenir à ce menu, cliquez sur le bandeau de titre en haut de la page où vous vous trouvez.

Le cours

Définitions 1 à 4, théorèmes 1 et 2 et les sept exemples, avec les démonstrations au programme.

Ouvrir le cours

La vérification

QCM en deux parties : les définitions et théorèmes, puis les exemples du cours. Ni noté, ni chronométré.

Ouvrir le QCM de vérification

Les ateliers

Réalisables dans l'ordre de votre choix. Capacités attendues : 1 h 15.

	Intitulé	Type	Durée	Documents
A	Des sécantes aux tangentes	Cap. att.	25 min	Consignes · Corrigé
B	Copies à la loupe	Conso.	30 min	Consignes · Corrigé
C	Une courbe, un nombre, une droite	Cap. att.	30 min	Consignes · Cartes · Corrigé
D	Le nombre dérivé en situation	Cap. att.	20 min	Consignes · Dominos · Corrigé
E	Retour sur les droites	Remed.	25 min	Consignes · Corrigé
F	Fluxion contre d/dx	Approf.	35 min	Planche · Consignes · Corrigé
G	Le zoom infini	Approf.	35 min	Consignes · Parcours en ligne
H	Cap sur l'EAM	Conso.	20 min	Consignes · QCM en ligne

Cap. att. : les capacités attendues sont les incontournables du chapitre.
Remed. : la remédiation reprend des anciennes notions à réactiver, pas à pas.
Conso. : la consolidation entraîne sur ce qui vient d'être vu, pour l'ancrer.
Approf. : l'approfondissement va plus loin que les incontournables.

Dérivation : point de vue local

Cours

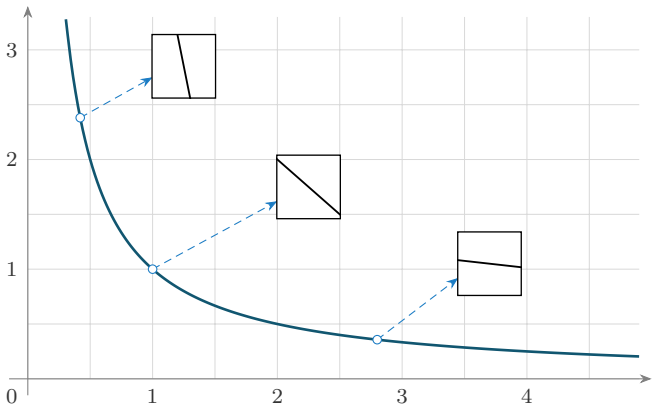
« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. »

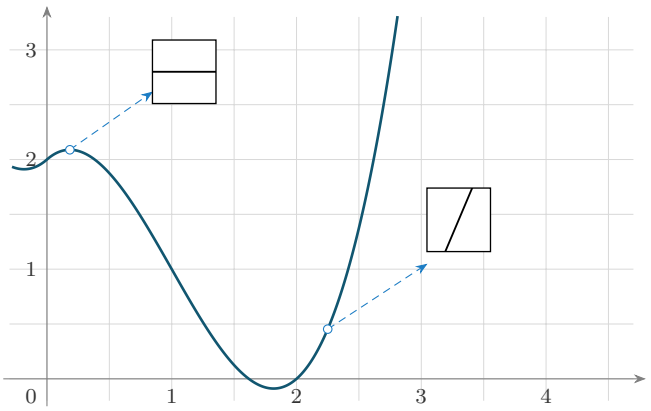
Alexandre Grothendieck

La pente d'une droite, son coefficient directeur, c'est une notion bien connue, c'est entendu. Mais si on veut essayer de généraliser à d'autres courbes, c'est tout de suite une autre paire de manches. D'abord, une courbe (on supposera pour simplifier le propos qu'on exclut les droites), ça change constamment : ça peut être par endroits très pentu, et pas du tout à d'autres. Parfois ça descend, parfois ça monte. Ce n'est pas fixé comme pour une droite.

La pente n'est pas la même partout, c'est sûr. Pourtant, on sent bien qu'à un endroit précis, une courbe monte ou descend et elle est plus ou moins pentue. **La pente d'une courbe dépend du point que l'on choisit pour l'analyser.**

Pour mieux comprendre l'idée de pente, prenons des courbes et observons-les. En voici deux ci-dessous (d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$), mais on peut bien sûr le faire avec toutes celles qu'on connaît. Choisissons quelques lieux et zoomons sur chacun d'eux, zoomons, zoomons...





Voilà qui est pour le moins inattendu : à chaque fois, en zoomant suffisamment sur un point, on dirait qu'on obtient... une droite. Ce n'est pas vraiment une droite bien sûr, puisque c'est une courbe. Mais ça s'en rapproche. Sacrément même. Si on zoome assez, on ne peut pas faire la différence : la courbe devient presque droite. On part alors de cette idée que **la pente d'une courbe (en un point), c'est la pente de la droite obtenue en zoomant indéfiniment sur ce point**, et on l'obtient à partir du calcul de la pente d'une sécante à la courbe.

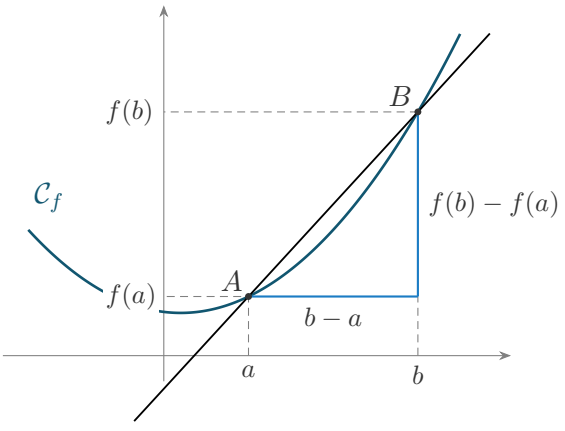
I. Taux de variation d'une fonction et sécante à une courbe

Définition 1. Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux réels appartenant à I.

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ce taux de variation est la **pente de la sécante** à la courbe représentative de f passant par les points de la courbe d'abscisses a et b.



Exemple 1. Calculer le taux de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) entre 1 et 5. En déduire la pente de la sécante (AB) où $A(1\,;1)$ et $B(5\,;25)$.

Solution. Le taux vaut, par définition : $\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = \dfrac{5^2-1^2}{5-1} = \dfrac{24}{4} = 6$.

Les points $A(1\,;1)$ et $B(5\,;25)$ sont les points de la courbe d'abscisses 1 et 5 : la pente de la sécante (AB) est donc 6.

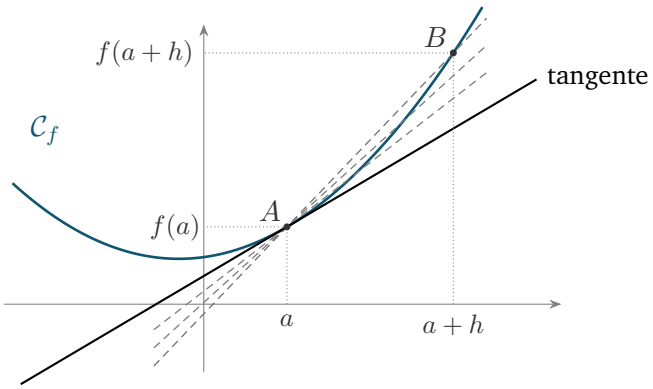
II. Nombre dérivé d'une fonction en un réel et tangente à une courbe en un point

En posant $b = a + h$, le taux s'écrit $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

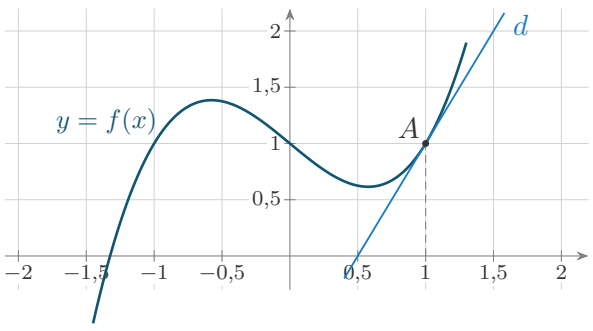
Définition 2. Lorsque h se rapproche de 0, si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre réel, on dit alors que f est **dérivable en a** et ce nombre est appelé **nombre dérivé de f en a** et noté $f'(a)$.

En liaison avec les autres disciplines, on rencontre aussi les notations $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ pour désigner un taux de variation et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour désigner un nombre dérivé. Si l'on note $y = f(x)$, on peut ainsi écrire $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, en adaptant les lettres selon le contexte.

Définition 3. Soit f une fonction dérivable en a et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. La **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A et de pente $f'(a)$. C'est la « limite des sécantes » (AB) lorsque le point B se rapproche du point A.



Exemple 2. On a tracé la courbe représentative d'une fonction f et sa tangente en A, le point de la courbe d'abscisse 1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 1.



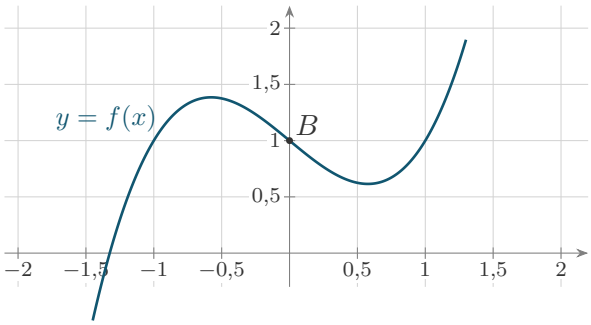
Solution. Le nombre dérivé de f en 1 est le coefficient directeur de la tangente en A.

La droite d semble passer par les points de coordonnées $(0{,}5\,;0)$ et $(1\,;1)$, ce qui donne un coefficient directeur environ égal à $\dfrac{1-0}{1-0{,}5} = 2$.

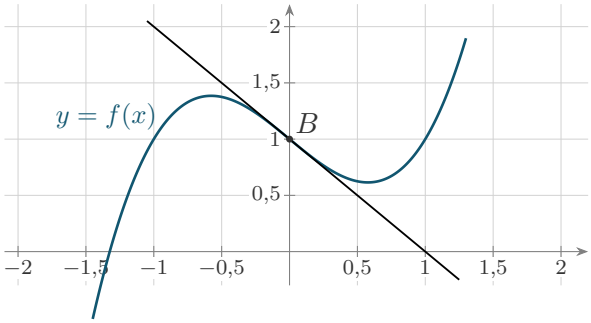
Graphiquement, le nombre dérivé de f en 1 est environ 2.

Exemple 3. On a tracé la courbe représentative d'une fonction f. On donne $f'(0) = -1$.

Construire la tangente à la courbe en B.



Solution. $f'(0) = -1$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en B. On trace donc la droite passant par B et dont le coefficient directeur est -1.



Il existe des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points.

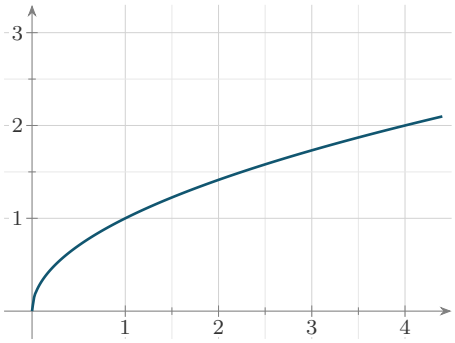
Théorème 1. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

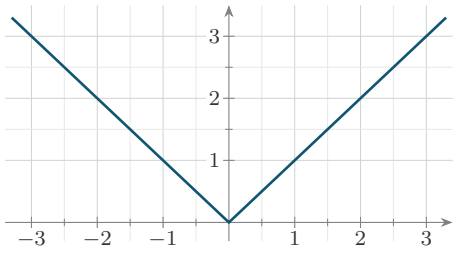
Démonstration. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Pour $h > 0$, le taux de variation de f entre 0 et h est :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h se rapproche de 0, $\sqrt{h}$ se rapproche de 0 donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient aussi grand qu'on veut (pour $h = 0{,}01$, il vaut 10 ; pour $h = 0{,}0001$, il vaut $100\ldots$) : le taux de variation ne se rapproche d'aucun nombre réel.

La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0 : sa courbe « devient verticale » à l'origine.





La fonction valeur absolue n'est pas non plus dérivable en 0 mais pour une autre raison. Comme $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$, si $b < 0$, le taux de variation entre 0 et b vaut -1 et si $b > 0$, le taux de variation entre 0 et b vaut 1 : sur la courbe représentative, en 0, on aura beau zoomer, la courbe ressemblera toujours à un « v », jamais à une droite : elle n'admet pas de tangente en 0.

Théorème 2. Soient f une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Démonstration. $f'(a)$ est la pente de la tangente donc son équation réduite $y = mx + p$ est de la forme :

$$y = f'(a)\,x + p \qquad (1)$$

Il reste à déterminer p. Mais la tangente passe par le point A. Ses coordonnées $\big(a\,;f(a)\big)$ vérifient donc l'équation (1), ce qui donne :

$$f(a) = f'(a) \times a + p.$$

On obtient ainsi $p = f(a) - f'(a) \times a$, que l'on peut injecter dans l'équation (1) :

$$y = f'(a)\,x + f(a) - f'(a) \times a$$

et après réorganisation et factorisation par $f'(a)$, on obtient l'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemple 4. Déterminer l'équation réduite de la tangente en 2 à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 1$, sachant que $f'(2) = 8$.

Solution. On calcule : $f(2) = 2 \times 2^2 - 1 = 7$ et $f'(2) = 8$.

D'après le théorème précédent, la tangente en 2 admet pour équation :

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) \iff y = 7 + 8(x - 2) \iff y = 8x - 9.$$

L'équation réduite de la tangente en 2 à la courbe est : $y = 8x - 9$.

III. Approximation affine

Définition 4. Soit f une fonction dérivable en a. La fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée **fonction affine tangente** de f au voisinage de a. Pour h proche de 0, on peut ainsi approcher $f(a+h)$ par :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h.$$

C'est l'idée même de l'introduction du chapitre : en zoomant suffisamment près du point A, la courbe se confond avec sa tangente. L'approximation affine consiste à remplacer, au voisinage de a, la fonction f par la fonction affine dont la courbe représentative est justement cette tangente.

Exemple 5. Soit f la fonction racine carrée, définie par $f(x) = \sqrt{x}$. On a $f(1) = 1$ et on admet que $f'(1) = 0{,}5$. Donner une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02}$.

Solution. On pose $a = 1$ et $h = 0{,}02$, de sorte que $1{,}02 = a + h$. D'après l'approximation affine, $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h$, donc

$$\sqrt{1{,}02} \approx 1 + 0{,}5 \times 0{,}02 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01.$$

(À la calculatrice, $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}00995$: l'approximation est très bonne car h est proche de 0.)

Pour conclure sur ce point de vue local de la dérivation, le taux de variation et le nombre dérivé peuvent être illustrés dans des contextes variés :

- en géométrie, le taux de variation représente la pente d'une sécante tandis que le nombre dérivé représente la pente d'une tangente ;
- en cinématique (étude physique des mouvements), le taux de variation peut être interprété comme une vitesse moyenne tandis que le nombre dérivé peut être interprété comme une vitesse instantanée ;
- dans un cadre économique, le nombre dérivé sert de valeur approchée du coût marginal.

Exemple 6. La distance parcourue par une boule sur une rampe, en m, est donnée en fonction du temps x, en s, par $f(x) = 0{,}4x^2$. On admet que $f'(2) = 1{,}6$. Interpréter ce résultat.

Solution. À l'instant $x = 2$ s, la vitesse instantanée de la boule est $1{,}6\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Exemple 7. Une entreprise fabrique q objets pour un coût total, en euros, de $C(q) = 0{,}01q^2 + 20q + 500$. On admet que $C'(100) = 22$. Interpréter ce résultat.

Solution. Le coût marginal est le coût de fabrication d'un objet supplémentaire, soit $C(q + 1) - C(q)$.

D'après la définition 4 avec $h = 1$, $C(101) \approx C(100) + C'(100) \times 1$ donc $C(101) - C(100) \approx C'(100) = 22$.

Fabriquer le 101$^{\text{e}}$ objet coûte donc environ 22 €.

Vérification : $C(100) = 100 + 2\,000 + 500 = 2\,600$ et $C(101) = 102{,}01 + 2\,020 + 500 = 2\,622{,}01$, donc $C(101) - C(100) = 22{,}01$.

ATELIER A

Des sécantes aux tangentes

Objectifs : Taux, tangente (construction, équation), approximation affine.
Durée : 25 minutes — sans calculatrice

Consignes

Traitez les exercices sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont en bas de la page.

Exercices

1. Soit $g(x) = x^2 - 3x$. Calculer le taux de variation de g entre 1 et 3.

2. Dans un repère tracé sur votre cahier (unité : 1 cm), placer le point $A(1\,;2)$. La courbe d'une fonction f passe par A et $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Construire la tangente à cette courbe en A.

3. Soit $h(x) = x^2 - 4x + 1$. On admet que $h'(3) = 2$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 3.

4. Pour $f(x) = x^2$, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. Donner une valeur approchée de $1{,}03^2$.

✶ AIDES ✶

1. *Voir définition 1 et exemple 1.* $g(1) = 1 - 3 = -2$ et $g(3) = 9 - 9 = 0$. Le taux vaut $\dfrac{g(3) - g(1)}{3 - 1}$.

2. *Voir exemple 3.* Pente $-\frac{1}{2}$: depuis A, on avance de 2 et on descend de 1. On arrive au point $(3\,;1)$: la tangente passe par A et par ce point.

3. *Voir théorème 2 et exemple 4.* $h(3) = 9 - 12 + 1 = -2$, donc $y = -2 + 2(x - 3)$. Il reste à développer et réduire.

4. *Voir définition 4 et exemple 5.* $1{,}03 = 1 + 0{,}03$, donc $h = 0{,}03$ et $1{,}03^2 \approx f(1) + f'(1) \times 0{,}03 = 1 + 2 \times 0{,}03$.

ATELIER B

Copies à la loupe

Objectifs : Repérer, expliquer et corriger les erreurs classiques du chapitre.
Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Vous êtes le correcteur de ces cinq copies. Sur votre cahier :

1. indiquez si chaque copie est juste ou non ;

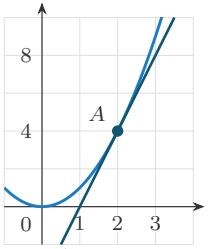
2. pour chaque copie erronée, expliquez l'erreur et rédigez une réponse correcte ;

3. copie 4 : remplacez x par -1 dans l'équation de l'élève, puis dans la vôtre ; laquelle passe par le point de la courbe d'abscisse -1 ?

Allez ensuite chercher le corrigé. Les aides sont sur la page suivante.

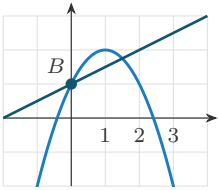
Les cinq copies

Copie 1. Lire $f'(2)$ sur le graphique.



Depuis A, quand on avance d'un carreau, la tangente monte de deux carreaux, donc $f'(2) = 2$.

Copie 2. La courbe passe par $B(0\,;1)$ et $f'(0) = 2$. Construire la tangente en B.



Pente 2 : depuis B, j'avance de 2 et je monte de 1. J'arrive en $(2\,;2)$ et je trace la droite.

Copie 3. $f(x) = x^2 + 1$ et $f'(3) = 6$. Équation réduite de la tangente en 3 ?

$y = f'(3)(x - 3) = 6(x - 3)$, *donc* $y = 6x - 18$.

Copie 4. $g(x) = 2x^2 + x$ et $g'(-1) = -3$. Équation réduite de la tangente en -1 ?

$g(-1) = 2 - 1 = 1$, *donc* $y = 1 - 3(x - 1) = 1 - 3x + 3$, *soit* $y = -3x + 4$.

Copie 5. $f(x) = \sqrt{x}$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0{,}5$. Valeur approchée de $\sqrt{0{,}96}$?

$0{,}96 = 1 + (-0{,}04)$, *donc* $\sqrt{0{,}96} \approx 1 + 0{,}5 \times (-0{,}04) = 0{,}98$.

★ AIDES ★

1. Pour chaque copie, refaites le calcul ou la lecture vous-même, puis comparez. *Valeur de contrôle* : une seule copie est juste.

2. **Copie 1** *(voir exemple 2)* : regardez la graduation de l'axe des ordonnées ; un carreau vertical ne vaut pas 1. La tangente passe par $A(2\,;4)$ et par le point d'abscisse 1 de l'axe des abscisses.
Copie 2 *(voir exemple 3)* : une pente de 2 signifie qu'on monte de 2 quand on avance de 1.
Copies 3 et 4 *(voir théorème 2 et exemple 4)* : $f(3) = 10$; pour $a = -1$, le facteur $(x - a)$ devient $\big(x - (-1)\big)$. *Valeur de contrôle* : les deux tangentes corrigées ont pour ordonnées à l'origine -8 et -2.
Copie 5 *(voir définition 4 et exemple 5)* : vérifiez le choix de a et de h, puis le calcul.

3. Le point de la courbe d'abscisse -1 a pour ordonnée $g(-1) = 1$. La bonne équation doit donc donner $y = 1$ pour $x = -1$.

ATELIER C

Une courbe, un nombre, une droite

Objectifs : Lire un nombre dérivé et relier tangente, $f'(a)$ et équation.
Matériel : 24 cartes **Durée :** 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Les 24 cartes forment 8 familles de 3 cartes :

- une carte **G** : la courbe d'une fonction f et sa tangente au point A ;
- une carte **V** : les valeurs de $f(a)$ et de $f'(a)$, où a est l'abscisse de A ;
- une carte **T** : l'équation réduite de cette tangente.

Le numéro d'une carte sert uniquement de repère : il n'indique pas sa famille. Répondez sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont sur la page suivante.

Travail à réaliser

1. Associez chaque carte G à une carte V : lisez les coordonnées du point A et la pente de la tangente.

2. Associez chaque carte V à une carte T : calculez l'équation réduite de la tangente.

3. Notez les 8 familles sur votre cahier sous la forme **G… – V… – T…**

4. Deux cartes G montrent le même point A. Lesquelles ? Qu'est-ce qui permet de les distinguer ?

★ AIDES ★

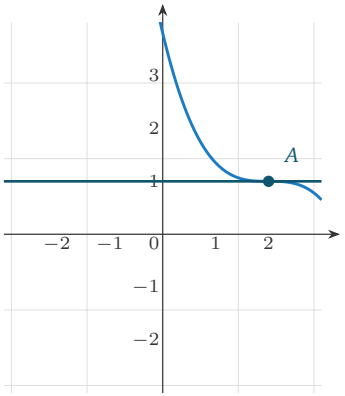
1. *Voir définition 3 et exemple 2.* Choisissez sur la tangente deux points situés à des nœuds du quadrillage, puis calculez la pente : écart vertical ÷ écart horizontal. Une tangente qui descend a une pente négative. *Valeur de contrôle* : une seule tangente est horizontale, sa pente vaut 0.

2. *Voir théorème 2 et exemple 4.* Remplacez dans $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, puis développez et réduisez. Attention au signe lorsque a est négatif : $x - (-1) = x + 1$. Lorsque $a = 0$, l'équation s'écrit directement $y = f'(0)\,x + f(0)$.

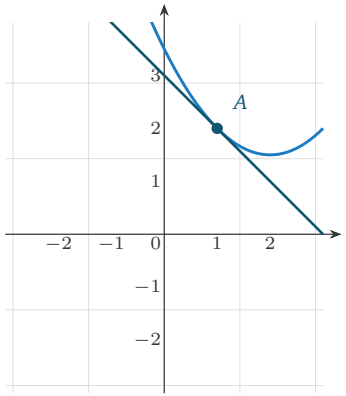
3. Quatre familles pour démarrer : G quatre, V cinq, T sept ; G un, V six, T huit ; G six, V deux, T trois ; G cinq, V trois, T six.

4. Le point A est le même, donc $f(a)$ est le même : c'est la tangente qui fait la différence. Comparez les pentes.

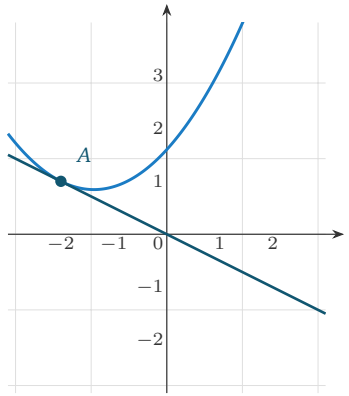
G1



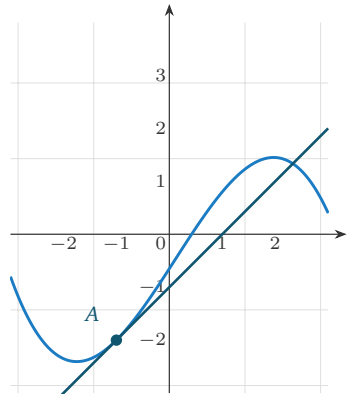
G2



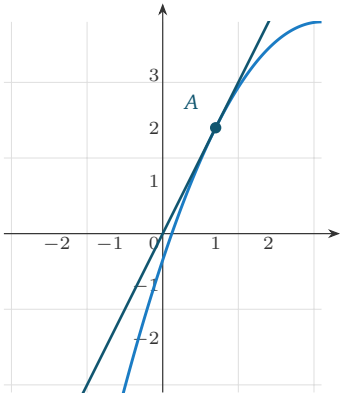
G3



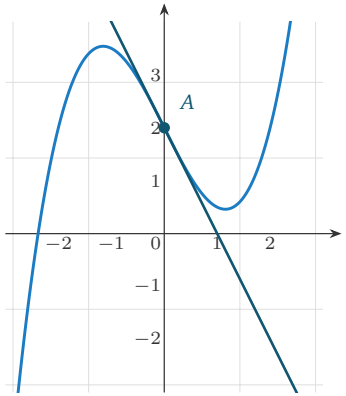
G4



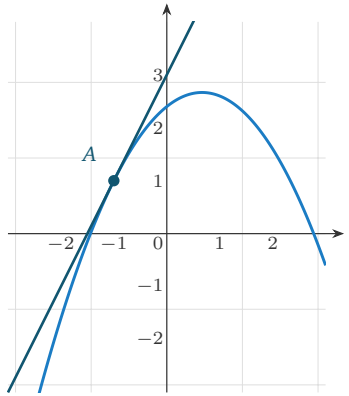
G5



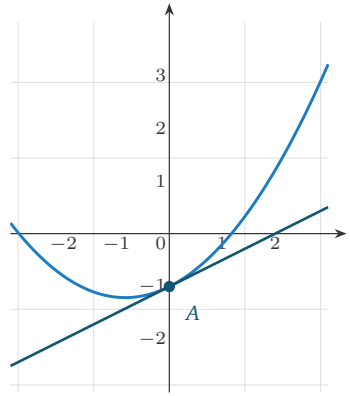
G6



G7



G8



V1

$f(-1) = 1$

et

$f'(-1) = 2$

V2

$f(0) = 2$

et

$f'(0) = -2$

V3

$f(1) = 2$

et

$f'(1) = 2$

V4

$f(0) = -1$

et

$f'(0) = \dfrac{1}{2}$

V5 $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 1$	**V6** $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$	**V7** $f(-2) = 1$ et $f'(-2) = -\frac{1}{2}$	**V8** $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$
T1 $y = \frac{1}{2}x - 1$	**T2** $y = 2x + 3$	**T3** $y = -2x + 2$	**T4** $y = -x + 3$
T5 $y = -\frac{1}{2}x$	**T6** $y = 2x$	**T7** $y = x - 1$	**T8** $y = 1$

ATELIER D

Le nombre dérivé en situation

Objectifs : Interpréter en contexte, approcher $f(a+h)$.
Matériel : 12 dominos **Durée :** 20 minutes — sans calculatrice

Consignes

Chaque domino porte, à gauche, un **nombre** et, à droite, une **question**. On place à la suite d'un domino celui dont le nombre de gauche est la réponse à sa question. Le code (D1, D2…) sert uniquement de repère : il n'indique pas la place du domino. Répondez sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont sur la page suivante.

Questions

1. Reconstituez la chaîne des 12 dominos. Elle doit **se refermer sur elle-même** : la réponse à la question du dernier domino est le nombre porté par le premier.

2. Écrivez la chaîne obtenue sous forme d'une liste de codes, en partant de D7.

3. Relevez le code des dominos dont la question porte sur :

- **a.** une vitesse moyenne ou un taux de variation ;
- **b.** une vitesse instantanée ;
- **c.** un coût marginal.

★ AIDES ★

1. *Voir définition 4 et exemple 5.* Pour une valeur approchée, écrivez le nombre sous la forme $a + h$ avec h proche de 0 (par exemple $0{,}99 = 1 + (-0{,}01)$), puis utilisez $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h$. Pour une vitesse moyenne ou un taux, revenez à la définition 1. *Valeur de contrôle* : les 12 nombres portés par les dominos sont tous différents ; si vous obtenez un nombre absent du jeu, le calcul est à revoir.

2. Deux maillons de la chaîne : d cinq $\longrightarrow$ d neuf $\longrightarrow$ d un et d huit $\longrightarrow$ d trois $\longrightarrow$ d dix. La chaîne demandée part de D7.

3. *Voir les exemples 6 et 7 et le paragraphe qui les précède.* Un taux de variation entre deux instants est une vitesse moyenne ; un nombre dérivé est une vitesse instantanée ; en économie, le nombre dérivé donne une valeur approchée du coût marginal, c'est-à-dire du coût d'un objet supplémentaire. *Attention* : la vitesse instantanée à l'instant $t = 3$ est $d'(3)$, et non la distance divisée par la durée, $\dfrac{d(3)}{3}$.

1,03	**D1** $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $f(1)=1$ et $f'(1)=-1$. Valeur approchée de $\dfrac{1}{1{,}05}$?	4	**D2** $d(t)=t^2$ (d en m, t en s) et $d'(3)=6$. **Vitesse instantanée** à $t=3$, en m/s ?	3	**D3** $f(3)=5$ et $f'(3)=2$. Valeur approchée de $f(3{,}1)$?	0,98	**D4** $V(t)$: volume d'eau, en L, au bout de t min. $V'(10)=-2$. Variation approximative du volume entre $t=10$ et $t=11$, en L ?
12	**D5** $C(100)=2\,000$ euros et $C'(100)=15$. Valeur approchée de $C(101)$, en euros ?	-7	**D6** La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y=-3x+5$. Que vaut $f'(a)$?	-3	**D7** Une balle parcourt $d(t)=t^2$ mètres en t secondes. **Vitesse moyenne** entre $t=1$ et $t=3$, en m/s ?	-2	**D8** $T(2)=10$ et $T(5)=19$: températures, en °C, à 2 h et 5 h. **Taux de variation** entre 2 h et 5 h, en °C par heure ?
2 015	**D9** $f(x)=\sqrt{x}$; $f(1)=1$ et $f'(1)=0{,}5$. Valeur approchée de $\sqrt{1{,}06}$?	5,2	**D10** $f(2)=1$ et $f'(2)=4$. **Ordonnée à l'origine** de la tangente au point d'abscisse 2 ?	6	**D11** $C(q)$: coût total, en euros, de q objets. On admet $C'(40)=12$. Coût approximatif du **41e objet**, en euros ?	0,95	**D12** $f(x)=x^2$; $f(1)=1$ et $f'(1)=2$. Valeur approchée de $0{,}99^2$?

ATELIER E

Retour sur les droites

Objectifs : Pente, équation réduite et tracé d'une droite.
Durée : 25 minutes — sans calculatrice

Consignes

Travaillez pas à pas sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont sur la page suivante.

Rappels de seconde

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite $y = mx + p$, où m est le **coefficient directeur** (ou pente) et p l'**ordonnée à l'origine**. Si elle passe par A et B, $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$: quand on avance de 1, la droite monte de m (elle descend si $m < 0$).

Exercices

Exercice 1. On donne $A(1\,;3)$, $B(4\,;9)$, $C(-2\,;5)$ et $D(2\,;3)$.

a. Calculer $y_B - y_A$, puis $x_B - x_A$; en déduire la pente de (AB).

b. Calculer de même la pente de (CD).

Exercice 2. Déterminer l'équation réduite de la droite :

a. de pente 2 passant par $A(1\,;3)$;

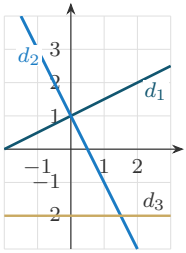
b. (CD) de l'exercice 1.

Exercice 3. Dans un repère (unité : 1 cm) :

a. tracer la droite passant par $E(0\,;-1)$ de pente 3 ;

b. tracer la droite passant par $F(1\,;2)$ de pente $-\frac{2}{3}$.

Exercice 4. Lire le coefficient directeur puis l'équation réduite de chacune des droites d_1, d_2 et d_3 ci-contre.



Exercice 5. La tangente à une courbe au point $A(2\,;1)$ a pour pente 3. Déterminer son équation réduite.

★ AIDES ★

1. Exercice 1 — $y_B - y_A = 9 - 3 = 6$ et $x_B - x_A = 4 - 1 = 3$. Pour (CD) : attention, $2 - (-2) = 2 + 2$. *Valeur de contrôle* : la pente de (CD) est négative.

2. Exercice 2 — On écrit $y = mx + p$ avec le m connu, puis on trouve p en remplaçant x et y par les coordonnées d'un point de la droite. a. $y = 2x + p$ et A est sur la droite, donc $3 = 2 \times 1 + p$. b. Avec la pente trouvée à l'exercice 1 et le point C : $5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) + p$, soit $5 = 1 + p$.

3. Exercice 3 — a. Depuis E, on avance de 1 et on monte de 3. b. Une pente de $-\frac{2}{3}$: depuis F, on avance de 3 et on descend de 2 ; on arrive en $(4\,;0)$.

4. Exercice 4 — Choisissez sur chaque droite deux points situés à des nœuds du quadrillage. L'ordonnée à l'origine se lit là où la droite coupe l'axe des ordonnées. *Valeur de contrôle* : d_1 et d_2 ont la même ordonnée à l'origine ; une droite horizontale a une pente nulle.

5. Exercice 5 — C'est la méthode de l'exercice 2 : $y = 3x + p$ et A est sur la tangente, donc $1 = 3 \times 2 + p$. *Voir aussi la démonstration du théorème 2.*

1666. La peste a fermé l'université de Cambridge : le jeune Isaac Newton travaille seul dans la ferme familiale de Woolsthorpe.

La distance parcourue par la pierre, en mètres, au bout de t secondes, est $x = f(t) = 5t^2$.

Question 1. Calculer la vitesse moyenne de la pierre entre $t = 1$ et $t = 2$.

Mais à l'instant $t = 2$ précisément, quelle est sa vitesse ?

Question 2. Montrer que, pour $h \neq 0$,
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 20 + 5h.$$
Question 3. En déduire $f'(2)$ et l'interpréter.

Cette vitesse, je la nomme *fluxion* et je la note $\dot{x}$!

Question 4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

1684. En Allemagne, Gottfried Wilhelm Leibniz publie sa propre méthode.

Moi, j'écris $\frac{dx}{dt}$!
Et tout près de $t = 2$, la courbe se confond avec sa tangente !

Nova methodus pro maximis et minimis.

Question 5. Sans calculatrice, donner une valeur approchée de $f(2{,}1)$, puis la comparer à la valeur exacte.

1712. La Royal Society de Londres, présidée par Newton, donne raison à Newton. La querelle durera des années.

Aujourd'hui, on utilise trois notations : $\dot{x}$ en physique, $\frac{dx}{dt}$ un peu partout, et $f'(t)$, celle de Lagrange (1797), en mathématiques !

ATELIER F

Fluxion contre d/dx

Objectifs : Du taux au nombre dérivé, en suivant Newton et Leibniz.
Durée : 35 minutes — sans calculatrice

Consignes

Les données et les cinq questions sont dans les bulles et les cartouches de la planche, au recto : lisez-la dans l'ordre des cases, répondez sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont en bas de la page.

Aide au calcul

$2{,}1^2 = 4{,}41$ et $5 \times 4{,}41 = 22{,}05$

AIDES

1. *Voir définition 1.* La vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 2$ est le taux de variation de f entre 1 et 2. On a $f(1) = 5$ et $f(2) = 20$.

2. Développez : $(2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$, donc $f(2+h) = 20 + 20h + 5h^2$. Soustrayez $f(2)$, puis divisez chaque terme par h.

3. *Voir définition 2 et exemple 6.* Que devient $20 + 5h$ lorsque h se rapproche de 0 ? Dans ce contexte, un nombre dérivé est une vitesse instantanée, en m/s.

4. *Voir théorème 2.* $y = f(2) + f'(2)(t-2)$, avec $f(2) = 20$. *Valeur de contrôle* : l'ordonnée à l'origine vaut -20.

5. *Voir définition 4 et exemple 5.* $2{,}1 = 2 + 0{,}1$, donc $f(2{,}1) \approx f(2) + f'(2) \times 0{,}1$. Pour la valeur exacte, utilisez l'aide au calcul.

ATELIER G

Le zoom infini

Objectifs : Voir ce que veut dire « dérivable », et ce qui arrive sinon.
Matériel : Un ordinateur **Durée :** 35 minutes

Consignes

Ouvrez le parcours sur **MathaCoeur** : **8 écrans**, à suivre dans l'ordre. Objectif : **6 bonnes réponses sur 7** du premier coup.

Le parcours part d'une phrase du cours — en zoomant assez sur un point, une courbe finit par ressembler à une droite — et la met à l'épreuve, jusqu'à trouver les courbes qui résistent au zoom. **Prenez le temps de manipuler** : curseurs de zoom, tableaux à dévoiler, paragraphes repliés. Les questions portent sur ce que vous venez de voir.

À l'écran 6, un bouton ouvre une **console Python** dans la page : le programme est déjà écrit, il suffit de l'exécuter, puis de le modifier. Si elle ne se charge pas, il s'exécute aussi sur `sciency.co/console`. Les aides sont en bas de la page.

Pour faire valider

1. Laissez l'**écran 8** affiché lorsqu'il indique « **Validé** » (au moins **6 sur 7**).

2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez cette fiche.

✦ AIDES ✦

1. *Voir la définition 2.* Une fonction est dérivable en a lorsque le taux de variation se rapproche d'*un* nombre quand h se rapproche de 0. Tout le parcours consiste à regarder, cas par cas, si ce nombre existe.

2. Sur les écrans de zoom, la fenêtre est **carrée** : les deux axes ont la même échelle. C'est ce qui permet de lire une pente directement à l'écran.

3. Si l'objectif n'est pas atteint, le bouton « Recommencer » du bas de page remet le parcours à zéro.

ATELIER H

Cap sur l'EAM

Objectifs : S'entraîner aux questions de type EAM sur le chapitre.
Matériel : Un ordinateur **Durée :** 20 minutes — sans calculatrice

Consignes

Ouvrez le QCM sur **MathaCoeur** : **10 questions**, toutes indépendantes. Objectif : **9 bonnes réponses au moins**.

Pour chaque question, cherchez la réponse *sur votre cahier* avant de cliquer. **Une fois la réponse choisie, elle est verrouillée**. La correction s'affiche aussitôt, avec une explication : lisez-la même quand vous avez juste. Après la dernière réponse, le bouton « **Revoir le QCM** » ramène aux corrections ; le bouton « **Recommencer** » relance un questionnaire neuf, avec d'autres valeurs.

Consultez votre cours autant que vous le souhaitez. Les aides sont sur la page suivante.

Pour faire valider

1. Après la dernière réponse, un écran de résultat s'affiche. Laissez-le **ouvert** lorsqu'il indique « **Validé** » (au moins **9 sur 10**).

2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez cette fiche.

★ AIDES ★

1. Lecture graphique *(définition 3, exemple 2)* : $f'(a)$ est la pente de la tangente en A ; choisissez deux nœuds du quadrillage sur la tangente. Une tangente horizontale a une pente nulle.

2. Équation de tangente *(théorème 2, exemple 4)* : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Pour savoir si un point est sur la tangente, remplacez x par son abscisse dans l'équation.

3. Taux et nombre dérivé *(définitions 1 et 2)* : si le taux vaut $m + kh$, regardez ce qu'il devient lorsque h se rapproche de 0 ; une droite parallèle à la tangente a la même pente.

4. Approximation et contextes *(définition 4, exemples 5 à 7)* : $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h$, avec h négatif si le nombre est inférieur à a ; un nombre dérivé est une vitesse instantanée ou un coût marginal.

ATELIER A

Corrigé — Des sécantes aux tangentes

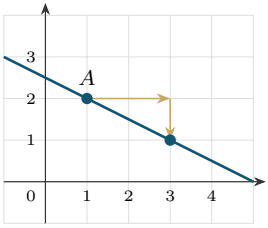
1. Taux de variation *(définition 1)*

$g(1) = 1^2 - 3 \times 1 = -2$ et $g(3) = 3^2 - 3 \times 3 = 0$, donc $\dfrac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \dfrac{0 - (-2)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

2. Construire la tangente *(définition 3)*

La pente de la tangente en A est $f'(1) = -\frac{1}{2}$: depuis $A(1\,;2)$, on avance de 2 et on descend de 1, on arrive en $(3\,;1)$.

La tangente est la droite passant par A et par $(3\,;1)$.



3. Équation de la tangente *(théorème 2)*

$h(3) = 9 - 12 + 1 = -2$ et $h'(3) = 2$, donc $y = h(3) + h'(3)(x - 3) = -2 + 2(x - 3) = -2 + 2x - 6$, soit $\boxed{y = 2x - 8}$.

4. Approximation affine *(définition 4)*

$1{,}03^2 \approx f(1) + f'(1) \times 0{,}03 = 1 + 2 \times 0{,}03 = 1{,}06$.

Pour information : $1{,}03^2 = 1{,}0609$, l'approximation est très bonne.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche et ce corrigé, votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le matériel.

ATELIER B

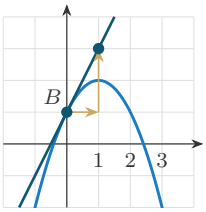
Corrigé — Copies à la loupe

1. Bilan

Copies 1, 2, 3 et 4 : **erronées**. Copie 5 : **juste**.

2. Diagnostic et correction

Copie 1 *(exemple 2)*. Le repère est orthogonal : un carreau vertical vaut 2 unités (graduations 4 et 8). La tangente passe par $(1\,;0)$ et $A(2\,;4)$, donc $f'(2) = \dfrac{4-0}{2-1} = \mathbf{4}$.



Copie 2 *(exemple 3)*. Écarts inversés : pente 2 signifie qu'on *avance de* 1 *et monte de* 2. La tangente passe par $B(0\,;1)$ et par $(1\,;3)$.

Copie 3 *(théorème 2)*. Oubli de $f(3)$: $f(3) = 3^2+1 = 10$, donc $y = 10+6(x-3) = 10+6x-18$, soit $\boxed{y = 6x-8}$.

Copie 4 *(théorème 2)*. Erreur de signe : avec $a = -1$, $x - a = x - (-1) = x + 1$. Donc $y = 1 - 3(x+1) = 1 - 3x - 3$, soit $\boxed{y = -3x-2}$.

Copie 5 *(définition 4)*. Juste : $a = 1$ et $h = -0{,}04$ (négatif, car $0{,}96 < 1$). *Pour information*, à la calculatrice, $\sqrt{0{,}96} \approx 0{,}9798$.

3. Contrôle de la copie 4

Le point de la courbe d'abscisse -1 est $(-1\,;1)$ car $g(-1) = 1$.
Équation de l'élève : $-3 \times (-1) + 4 = 7 \neq 1$: sa droite ne passe pas par ce point.
Équation corrigée : $-3 \times (-1) - 2 = 1$: elle passe bien par le point de la courbe.
Ce contrôle rapide permet de vérifier toute équation de tangente.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche et ce corrigé, votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le matériel.

ATELIER C

Corrigé — Une courbe, un nombre, une droite

Les 8 familles *(définition 3, théorème 2)*

Famille	Lecture sur G	Calcul (théorème 2)	T
G1 – V6 – T8	$A(2\,;1)$, pente 0	$y = 1 + 0 \times (x-2)$	$y = 1$
G2 – V8 – T4	$A(1\,;2)$, pente -1	$y = 2 - (x-1)$	$y = -x + 3$
G3 – V7 – T5	$A(-2\,;1)$, pente $-\frac{1}{2}$	$y = 1 - \frac{1}{2}(x+2) = 1 - \frac{1}{2}x - 1$	$y = -\frac{1}{2}x$
G4 – V5 – T7	$A(-1\,;-2)$, pente 1	$y = -2 + 1 \times (x+1)$	$y = x - 1$
G5 – V3 – T6	$A(1\,;2)$, pente 2	$y = 2 + 2(x-1) = 2 + 2x - 2$	$y = 2x$
G6 – V2 – T3	$A(0\,;2)$, pente -2	$y = 2 - 2(x-0)$	$y = -2x + 2$
G7 – V1 – T2	$A(-1\,;1)$, pente 2	$y = 1 + 2(x+1) = 1 + 2x + 2$	$y = 2x + 3$
G8 – V4 – T1	$A(0\,;-1)$, pente $\frac{1}{2}$	$y = -1 + \frac{1}{2}(x-0)$	$y = \frac{1}{2}x - 1$

Lire une pente : un exemple

Sur la carte G3, la tangente passe par $A(-2\,;1)$ et par l'origine $(0\,;0)$: quand on avance de 2, on descend de 1. La pente vaut $\dfrac{0-1}{0-(-2)} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, donc $f'(-2) = -\dfrac{1}{2}$.

4. Le même point A

Les cartes **G2** et **G5** montrent le même point $A(1\,;2)$: on a $f(1) = 2$ dans les deux cas. Seule la pente de la tangente les distingue : $f'(1) = -1$ pour G2 (la tangente descend), $f'(1) = 2$ pour G5 (elle monte). Inversement, G5 et G7 ont la même pente 2 (tangentes parallèles) mais pas le même point.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche, ce corrigé et les **24 cartes**, votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.

2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.

3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le matériel en comptant les cartes.

ATELIER D

Corrigé — Le nombre dérivé en situation

2. La chaîne (elle se referme)

D7 ⟶ **D2** ⟶ **D11** ⟶ **D5** ⟶ **D9** ⟶ **D1** ⟶ **D12** ⟶ **D4** ⟶ **D8** ⟶ **D3** ⟶ **D10** ⟶ **D6** ⟶ **D7**

1. Détail des calculs

D7 vitesse moyenne *(définition 1)* : $\dfrac{d(3)-d(1)}{3-1}=\dfrac{9-1}{2}=\mathbf{4}$ m/s.

D2 la vitesse instantanée à $t=3$ est le nombre dérivé *(exemple 6)* : $d'(3)=\mathbf{6}$ m/s.

D11 coût du 41e objet $=C(41)-C(40)\approx C'(40)=\mathbf{12}$ euros *(exemple 7)*.

D5 $C(101)\approx C(100)+C'(100)\times 1=2\,000+15=\mathbf{2\,015}$ euros.

D9 $\sqrt{1{,}06}\approx f(1)+f'(1)\times 0{,}06=1+0{,}5\times 0{,}06=\mathbf{1{,}03}$ *(définition 4)*.

D1 $\dfrac{1}{1{,}05}\approx 1+(-1)\times 0{,}05=\mathbf{0{,}95}$.

D12 $0{,}99^2\approx 1+2\times(-0{,}01)=\mathbf{0{,}98}$ (ici $h=-0{,}01$).

D4 $V(11)-V(10)\approx V'(10)\times 1=\mathbf{-2}$ L : le volume diminue d'environ 2 L.

D8 $\dfrac{T(5)-T(2)}{5-2}=\dfrac{19-10}{3}=\mathbf{3}$ °C par heure.

D3 $f(3{,}1)\approx f(3)+f'(3)\times 0{,}1=5+2\times 0{,}1=\mathbf{5{,}2}$.

D10 tangente : $y=1+4(x-2)=4x-7$, d'ordonnée à l'origine $\mathbf{-7}$ *(théorème 2)*.

D6 $f'(a)$ est la pente de la tangente : $f'(a)=\mathbf{-3}$, nombre du domino D7 : la chaîne est bouclée.

3. Interpréter

a. Vitesse moyenne, taux de variation : **D7** et **D8**. **b.** Vitesse instantanée : **D2**. **c.** Coût marginal : **D11** (D5 demande le coût total $C(101)$, approché grâce à $C'(100)$).

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche, ce corrigé et les **12 dominos**, votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.
2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.
3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le matériel en comptant les dominos.

Exercices 1, 2 et 5. Pentes et équations réduites

1. a. $y_B - y_A = 9 - 3 = 6$, $x_B - x_A = 4 - 1 = 3$: pente de (AB) : $\frac{6}{3} = \mathbf{2}$.

1. b. Pente de (CD) : $\dfrac{3-5}{2-(-2)} = \dfrac{-2}{4} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$: la droite descend.

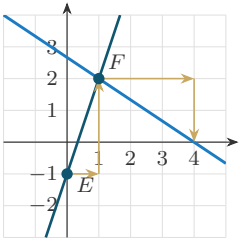
2. a. $y = 2x + p$ et $A(1\,;3)$ est sur la droite : $3 = 2\times 1 + p$, d'où $p = 1$: $\boxed{y = 2x + 1}$.

2. b. $y = -\frac{1}{2}x + p$ et $C(-2\,;5)$: $5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) + p = 1 + p$, d'où $p = 4$: $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 4}$.

Contrôle avec $D(2\,;3)$: $-\frac{1}{2} \times 2 + 4 = 3$.

5. $y = 3x + p$ et $A(2\,;1)$: $1 = 3 \times 2 + p$, d'où $p = -5$: $\boxed{y = 3x - 5}$. *C'est la démonstration du théorème 2, avec* $m = f'(a)$.

Exercices 3 et 4. Tracer et lire



3. a. Depuis $E(0\,;-1)$: avancer de 1, monter de 3 ; la droite passe par $(1\,;2)$.

3. b. Depuis $F(1\,;2)$: avancer de 3, descendre de 2 ; la droite passe par $(4\,;0)$.

4. d_1 passe par $(0\,;1)$ et $(2\,;2)$: pente $\frac{1}{2}$, $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$.

d_2 passe par $(-1\,;3)$ et $(1\,;-1)$: pente $\frac{-4}{2} = -2$, ordonnée à l'origine 1 : $\boxed{y = -2x + 1}$.

d_3 est horizontale : pente 0, $\boxed{y = -2}$.

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la fiche et ce corrigé, votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.
2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.
3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le matériel.

Corrigé

1. *(définition 1)* $f(1) = 5 \times 1^2 = 5$ et $f(2) = 5 \times 2^2 = 20$. La vitesse moyenne est le taux de variation : $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{20 - 5}{1} = 15$, soit **15** m/s.

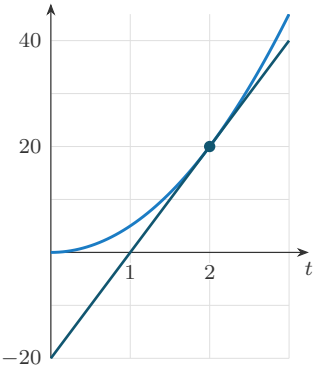
2. $f(2 + h) = 5(2 + h)^2 = 5(4 + 4h + h^2) = 20 + 20h + 5h^2$, donc, pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{20h + 5h^2}{h} = \frac{h(20 + 5h)}{h} = 20 + 5h.$$

3. *(définition 2)* Lorsque h se rapproche de 0, $5h$ se rapproche de 0, donc le taux se rapproche de 20 : f est dérivable en 2 et $\boxed{f'(2) = 20}$.
Interprétation (exemple 6) : à l'instant $t = 2$ s, la vitesse instantanée de la pierre est de **20** m/s. C'est la « fluxion » de Newton, notée $\dot{x}$, ou $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ chez Leibniz.

4. *(théorème 2)* $y = f(2) + f'(2)(t - 2) = 20 + 20(t - 2) = 20 + 20t - 40$, soit $\boxed{y = 20t - 20}$.

5. *(définition 4)* $2{,}1 = 2 + 0{,}1$, donc $f(2{,}1) \approx f(2) + f'(2) \times 0{,}1 = 20 + 2 = \mathbf{22}$.
Valeur exacte : $f(2{,}1) = 5 \times 2{,}1^2 = 5 \times 4{,}41 = 22{,}05$. L'écart n'est que de $0{,}05$: tout près de $t = 2$, la courbe se confond presque avec sa tangente, comme l'annonce Leibniz.



Courbe de f et tangente en 2

Pour faire valider

1. Gardez sur la table la planche et ce corrigé, votre **cahier** ouvert à la page de l'atelier.
2. Présentez votre **fiche de suivi** : le professeur vous pose une question avant de la tamponner.
3. Une fois l'atelier validé seulement, rangez le matériel.